

电路理论基础

W.D.Gaster

2025 年 11 月

目录

1	电路元件与基本定律	1
1.1	电路变量	1
1.1.1	电流	1
1.1.2	电压与电动势	1
1.1.3	电功率	1
1.2	阻容感元器件	2
1.2.1	电阻	2
1.2.2	电容	2
1.2.3	电感	3
1.3	电源	3
1.3.1	独立源	3
1.3.2	受控源	4
1.4	基尔霍夫定律	4
1.4.1	基尔霍夫电流定律 KCL	4
1.4.2	基尔霍夫电压定律 KVL	4
2	线性直流电路分析	5
2.1	电阻网络的等效	5
2.1.1	串并联等效	5
2.1.2	星三角变换	5
2.2	含源支路的等效变换	6
2.3	回路电流法	7
2.3.1	支路电流法	7
2.3.2	回路电流法	7
2.4	节点电压法	8
2.5	电路定理	9
2.5.1	置换定理	9
2.5.2	齐性定理和叠加定理	9
2.5.3	等效电源定理	10
2.5.4	特勒根定理	10
2.5.5	互易定理	10
2.5.6	对偶原理	11
3	正弦电流电路分析	12
3.1	相量表示法	12
3.1.1	正弦量	12
3.1.2	相量表示法	12
3.2	正弦电流电路的相量分析法	12
3.2.1	基尔霍夫定律的相量形式	12
3.2.2	阻抗和导纳	12
3.2.3	分析方法	14

目录	3
3.3 正弦电流电路的功率	15
3.4 耦合电感	15
3.4.1 互感元件	15
3.4.2 互感元件的等效电路	16
3.5 理想变压器	17
4 非正弦周期电流电路分析	18
4.1 非正弦周期量的分解	18
4.1.1 傅里叶级数分解	18
4.1.2 有效值和功率	18
4.2 非正弦周期电流电路计算	18
5 三相电路分析	19
5.1 三相电压和联结	19
5.1.1 三相电压	19
5.1.2 三相联结	19
5.2 三相电路的计算	21
5.2.1 对称三相电路	21
5.2.2 不对称三相电路	21
5.2.3 三相电路的功率	22
6 频率响应	23
6.1 频率特性	23
6.2 谐振现象	23
6.2.1 串联谐振	23
6.2.2 并联谐振	24
7 电路暂态过程分析	25
7.1 电路量的初始值	25
7.2 一阶电路的响应	25
7.2.1 零输入响应	25
7.2.2 零状态响应	26
7.2.3 全响应	27
7.3 二阶电路的暂态过程	27
7.4 状态变量分析	27
7.5 复频域分析	28
7.5.1 拉普拉斯变换	28
7.5.2 复频域的电路模型	28
7.5.3 复频域分析方法	29
7.5.4 网络函数	30

8	二端口网络	32
8.1	参数矩阵和参数方程	32
8.2	二端口网络的等效电路	33
8.3	二端口网络与电源负载的连接	33
8.4	二端口网络的连接	34
9	非线性电阻电路	35
9.1	非线性直流电路方程	35
9.1.1	电路方程列写	35
9.1.2	数值分析法	35
9.2	特性曲线求解	36
9.2.1	分段线性近似法	36
9.2.2	图解法	37
9.3	小信号分析法	37
10	均匀传输线	38
10.1	正弦稳态分析	38
10.1.1	正弦稳态解	38
10.1.2	行波	39
10.2	无损耗线	40
10.2.1	稳态方程和阻抗变换	40
10.2.2	三种不匹配阻抗的工作状态	40
10.3	均匀传输线的集中参数等效电路	42
10.4	无损线零状态响应的暂态分析	42
10.4.1	零状态响应的通解	42
10.4.2	波的发出	43
10.4.3	波的反射	43

电的应用，无论是能量转换或信息处理，都要由电器件来实现。能够输出电能或电信号的器件称为电源，要求输入电能或电信号的器件称为负载。还有一些用来传输、变换、控制和测量电能和电信号的电器件。

电源和负载通过一些传输、变换、控制、测量等器件连接起来，构成电路。电路又称为电网络或简称网络。

把实际电路的本质特征抽象出来形成的理想化的电路称为电路模型。每一个电器件的本质特征用一个或若干个理想化电路元件来表示，每一种电路元件只表示一种电磁特性。元件的电磁特性可以用参数、特性方程或特性曲线来表示。

电磁特性为线性的元件称为线性元件，否则称为非线性元件。电源和线性元件组成的电路称为线性电路，使用线性代数方程或线性微积分方程描述。不能用线性方程描述的电路称为非线性电路。

参数随时间变化的元件称为时变参数元件，否则称为非时变参数元件。含有时变参数元件的电路称为时变电路，否则称为非时变电路。本笔记不涉及时变电路分析。

当元件各项尺寸远小于电磁量工作频率所对应的电磁波波长而无需考虑电磁量的空间分布时，称为集中参数元件。仅含集中参数元件的电路称为集中参数电路。需要考虑电磁量的空间分布性的电路称为分布参数电路。

1 电路元件与基本定律

1.1 电路变量

1.1.1 电流

荷电质点的有序运动形成电流，电流大小为 $i = \frac{dq}{dt}$ ，方向为正电荷运动的方向。

在分析复杂电路时，难以判断电流的真实方向，可以任意假定一个方向作为参考方向。当参考方向求得电流为正时，真实方向与参考方向一致。当求得电流为负时，真实方向与参考方向相反。

数值和方向不随时间变化的电流称为直流（Direct Current,DC）或恒定电流。随时间作周期性变化且平均值为零的电流称为交变电流（Alternating Current,AC），简称交流。

1.1.2 电压与电动势

单位正电荷移动所做的功为电压， $u_{ab} = \frac{dW_{ab}}{dq}$ ，又称电位差。在电路中选一点作为电位参考点，各点的电位便可确定，电压为两点间的电位差。电压同样也有参考方向和直流交流之分，与电流相同。

将元件上的电压和电流参考方向取为相同称为关联参考方向。

电源使单位正电荷从负极移动到正极所做的功为电动势 $e = \frac{dW}{dq}$ ，方向为负极指向正极，与电压相反。

1.1.3 电功率

电功率用来衡量电能转换或传输速率， $p = \frac{dW}{dt} = ui$ 。电能转换成其他形式能量时，电能对外做功，元件消耗电能或吸收功率；其他形式能量转换为电能时，元件发出电能或发出功率。

取关联参考方向时，正值吸收功率，负值发出功率；取非关联参考方向时，正值发出功率，负值吸收功率。

实际的电气设备、元器件本身有功率的限制，这就是额定功率。

1.2 阻容感元器件

1.2.1 电阻

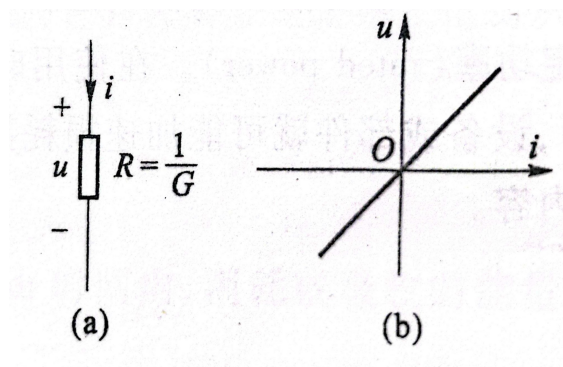


图 1.1: 线性电阻符号及其特性

电阻元件是用来表示电路中的电能消耗的理想元件。线性二端电阻遵循欧姆定律，即 $u = Ri$ 或 $i = Gu$ 。消耗的功率 $p = ui = Ri^2 = Gu^2$ ，此即为焦耳定律。电阻元件只能吸收电能而不能发出电能，是无源元件。对于非线性电阻， $u = u(i)$ 或 $i = i(u)$ ，不满足欧姆定律。

1.2.2 电容

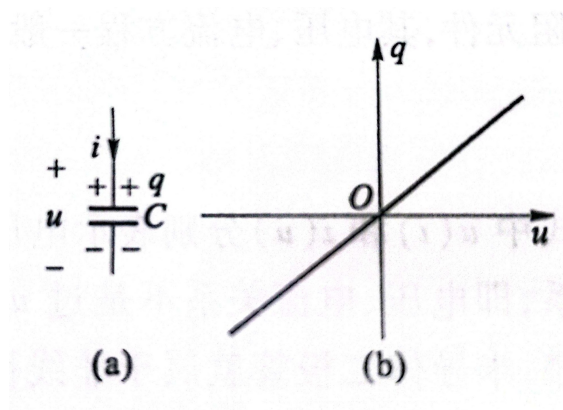


图 1.2: 线性电容符号及其特性

电容器由两块用介质绝缘的金属板构成，电容两端加电压时可以聚起等量正负电荷，建立电场，储存电场能量。储存的电荷和电压的关系为 $q = Cu$ ，其中平行板电容器的电容 $C = \frac{\epsilon A}{d}$ 。

电容的 ui 关系为 $i = C \frac{du}{dt}$ 或 $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$ ，为微积分关系，属于动态元件。由于电压从负无穷开始算，因此具有记忆特性。也可以写为 $u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi$ ， $u(t_0)$ 称为初始电压。

功率为 $p = ui = Cu \frac{du}{dt}$ ，电容吸收的总能量为 $W_e = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{q^2}{2C}$ ，是储能元件。理想电容不产生能量损耗，是无损元件。

1.2.3 电感

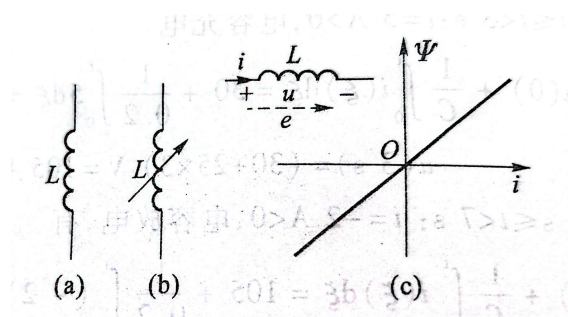


图 1.3: 线性电感符号及其特性

电感线圈中通入电流 i ，激发磁场 B ，形成与电流相交链的磁通 Φ ，与每匝线圈相链的磁通之和为该线圈的磁链 Ψ ，遵循右手螺旋定则。线性电感满足 $\Psi = Li$ 。

电感的 ui 关系为 $u = L \frac{di}{dt}$ 或 $i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$ ， $i(t_0)$ 称为初始电流。关系为微积分关系，属于动态元件。由于电流从负无穷开始算，因此也具有记忆特性。

功率为 $p = ui = Li \frac{di}{dt}$ ，电感吸收的总能量为 $W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{\Psi^2}{2L}$ ，是储能元件。理想电感不产生能量损耗，是无损元件。

1.3 电源

1.3.1 独立源

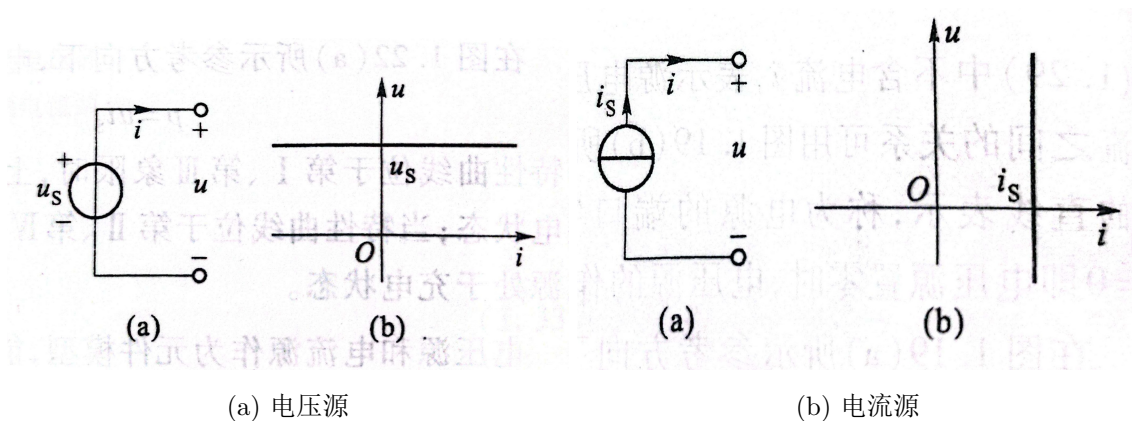


图 1.4: 独立源的符号和特性

电压源的电流在一定范围内时输出电压与电流大小无关。 $u = u_s$

电流源的电压在一定范围内时输出电流与电压大小无关， $i = i_s$ 。

独立源提供的源电压（流）是维持各电压、电流存在的原因，称为激励。激励引起的电压电流称为响应。

1.3.2 受控源

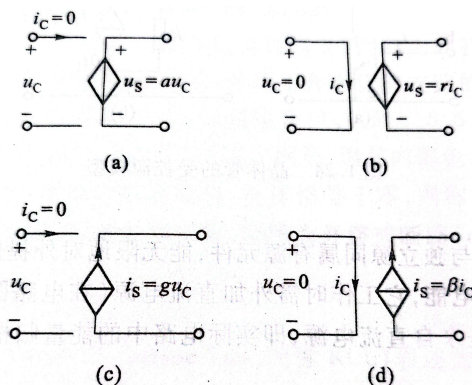


图 1.23 受控源的电路符号

(a) 电压控制电压源 (b) 电流控制电压源

(c) 电压控制电流源 (d) 电流控制电流源

图 1.5: 四种受控源的符号和特性

源电压或源电流受电路中另一处电压或电流控制，称为受控电源或非独立电源。

包括电压控制电压源（VCVS） $u_s = \alpha u_c, i_c = 0$ ，电流控制电压源（CCVS） $u_s = r i_c, u_c = 0$ ，电压控制电流源（VCCS） $i_s = g u_c, i_c = 0$ ，电流控制电流源（CCCS） $i_s = \beta i_c, u_c = 0$

受控源能对外提供电能，但能量的来源是独立源，电路中的能量是由独立源提供的。

1.4 基尔霍夫定律

每一个二端元件是一条支路（branch）。若干支路的连接点是节点（node），只有两个支路的连接点称为简单节点。两节点间由支路和节点依次连接成的一条通路称为路径（path）。闭合的路径称为回路（loop）。平面电路内部或外部不包含任何支路的单孔回路称为网孔（mesh），是最简单的回路。内部不存在的支路的为内网孔，外部不存在支路的为外网孔。

电路画在平面上能做到除节点外各支路都不相交则为平面电路，否则为非平面电路。

不论电流是任何有限值，电压恒等于零称为短路（short circuit）；不论电压是任何有限值，电流恒等于零称为开路（open circuit）或断路。

1.4.1 基尔霍夫电流定律 KCL

在集中参数电路中，任一时刻流入或流出任一闭合边界 S 的支路电流代数和为零。即 $\sum i_k = 0$

在 n 个节点的电路中，任一 $n - 1$ 个节点的 KCL 方程是一组独立方程。

1.4.2 基尔霍夫电压定律 KVL

在集中参数电路中，任一时刻沿任一回路各支路的电压代数和为零，即 $\sum u_k = 0$

平面电路网孔上的 KVL 方程是一组独立方程。 b 个支路和 n 个节点的电路独立 KVL 方程个数为 $b - n + 1$ 。

2 线性直流电路分析

由直流电压源和（或）直流电流源激励，并且各部分电压、电流都是恒定量的电路称为直流电路。由线性元件和独立源组成的直流电路称为线性直流电路。

等效是指被化简的网络与等效网络对应端口特性相同，即 $u-i$ 关系相同。

2.1 电阻网络的等效

若干电阻相互连接构成的电路称为电阻网络。

2.1.1 串并联等效

串联： $R_{eq} = \sum R_k$, $U_k = \frac{R_k}{R_{eq}}U$, 功率分配与电压分配都与电阻成正比。串联用于分压称为分压器。

并联： $G_{eq} = \sum G_k$, $I_k = \frac{G_k}{G_{eq}}I$, 功率分配与电流分配均与电导成正比，与电阻成反比。并联用于分流称为分流器。

2.1.2 星三角变换

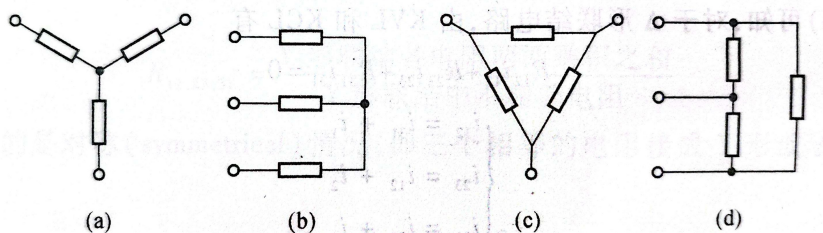


图 2.1: 电阻网络的星形联结与三角形联结

各电阻共用一端，另一端各自引出称为星形联结，也称 Y 形联结或 T 形联结。各电阻依次首尾相连并在各连接处引出称为三角形联结，也称 Δ 形联结或 Π 联形结。两种联结可以等效。

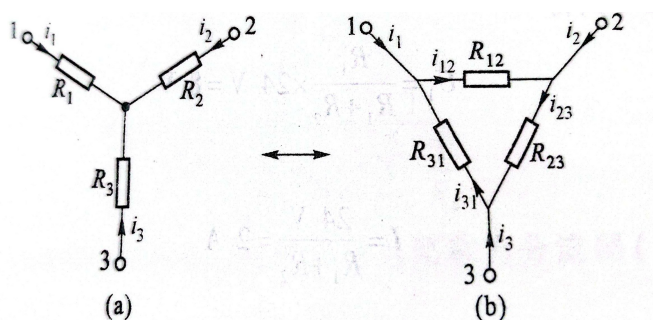


图 2.2: Y- Δ 变换

$\Delta-Y$ 变换:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$Y-\Delta$ 变换:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \quad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \quad R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

对于对称情况的 $Y-\Delta$ 变换, 有 $R_Y = R_1 = R_2 = R_3$, 则 $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta = 3R_Y$ 。

2.2 含源支路的等效变换

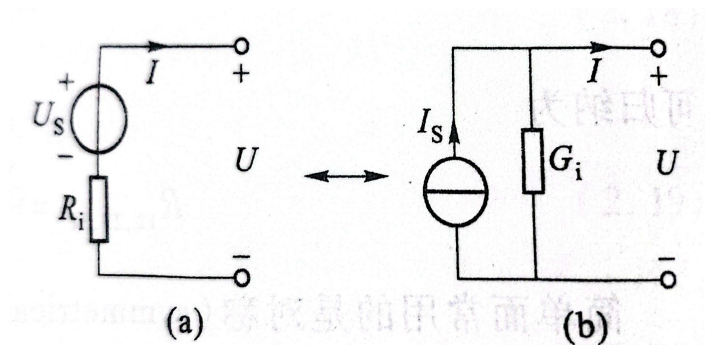


图 2.3: 含源支路的等效变换

电压源串联电阻支路: $U = U_s - R_i I$, 电流源并联电导支路: $I = I_s - G_i U$

则它们的等效关系为 $I_s = U_s G_i$, $R_i G_i = 1$

理想电压源 $R_i = 0$ 和理想电流源 $G_i = 0$ 不能互相等效, 对于有内阻或内导的实际电源可以互相等效。

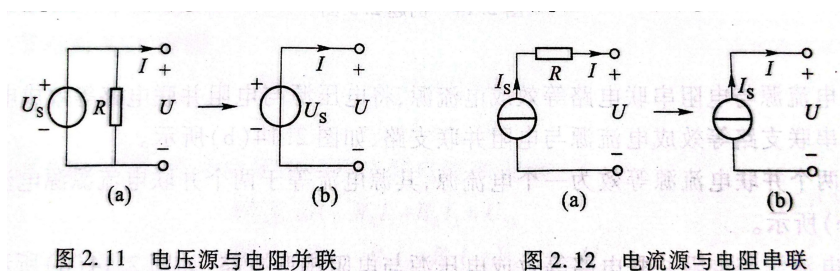


图 2.11 电压源与电阻并联

图 2.12 电流源与电阻串联

图 2.4: 含源支路的化简

电压源并联电阻时端口电压 $U = U_s$, 即与电压源并联部分无效。

电流源串联电阻时端口电流 $I = I_s$, 即与电流源串联部分无效。

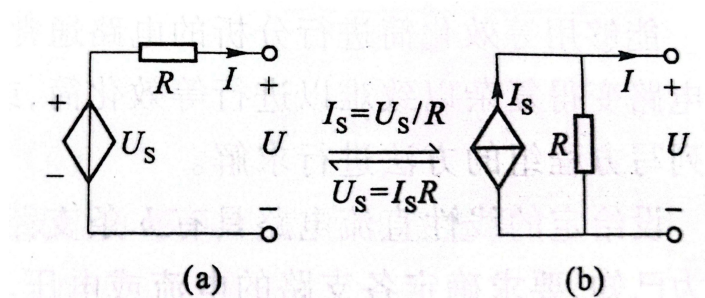


图 2.5: 受控源支路的等效变换

受控电源变换时要保证控制量的位置不变。

2.3 回路电流法

2.3.1 支路电流法

【例题 2.5】用支路电流法求图 2.16 所示电路中的电流 I_1, I_2, I_3 。

【解】对节点①列 KCL 方程

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

对网孔列 KVL 方程

$$\text{网孔 m1: } 8\Omega \times I_1 + 6\Omega \times I_2 + 3U_1 = 24\text{ V} \quad (2)$$

$$\text{网孔 m2: } -6\Omega \times I_2 + (4+2)\Omega \times I_3 - 3U_1 = -12\text{ V} \quad (3)$$

上述方程中含有未知的受控源的控制电压 U_1 。在支路电流方程中要用支路电流表示控制电压。即

$$U_1 = 2\Omega \times I_3 \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)、(3)消去 U_1 ，再与式(1)联立并写成矩阵形式的支路电流方程

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ -12 \end{bmatrix}$$

解得

$$I_1 = \frac{12}{7}\text{ A}, I_2 = 2\text{ A}, I_3 = -\frac{2}{7}\text{ A}$$

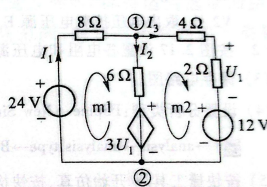


图 2.16 例题 2.5 图

图 2.6: 支路电流法

2.3.2 回路电流法

假设每个独立回路内分别存在一个闭合流动的电流，即回路电流，记为 I_{mi} 。则支路电流可以通过回路电流的代数和表示，支路电流与回路电流方向相同取正号，否则取负号。

由于回路电流是连续的，以回路电流为待求量，等价应用了 KCL。

回路电流方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m1} U_s \\ \sum_{m2} U_s \\ \vdots \\ \sum_{mm} U_s \end{bmatrix}$$

R_{ii} 为各支路电阻之和，称为回路自阻。

R_{ij} 为两个回路间公共支路的电阻，称为相邻两回路间的互阻，两回路电流同向互阻为正，反向互阻为负。在仅由独立源和二端电阻组成的网络中， $R_{ij} = R_{ji}$ ，具有对称性。

$\sum_{mi} U_s$ 为沿回路电压源电位升的代数和。

适当选取回路使电流源只包含在一个回路中，可以减小待求量及方程数。

【例题 2.7】电路如图 2.21 所示。试列出回路电流方程。

【解】选网孔为独立回路，如图所示，所列方程如下

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2I_{m2} &= U_{S1} - \alpha U_1 \\ -R_2I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} &= -U_{S2} + \alpha U_1 - rI_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

本例含有受控源，在回路电流法中，用回路电流表示各受控源的控制量，即

$$\begin{aligned} U_1 &= -R_1I_{m1} \\ I_2 &= I_{m1} - I_{m2} \end{aligned} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)消去控制量，并整理得回路电流方程

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2 - \alpha R_1)I_{m1} - R_2I_{m2} &= U_{S1} \\ (-R_2 + \alpha R_1 + r)I_{m1} + (R_2 + R_3 - r)I_{m2} &= -U_{S2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

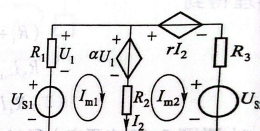


图 2.21 例题 2.7 图

图 2.7: 回路电流法

2.4 节点电压法

任选一点作为参考点, 其他各节点与参考点之间的电压称为该节点的节点电压, 记为 U_{ni} 。任意两点间的电压表达为两节点电压之差。

用节点电压表示支路电压时, 相等于等价列写了 KVL 方程。

节点电压方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ \vdots \\ U_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1 I_s + \sum_1 GU_s \\ \sum_2 I_s + \sum_2 GU_s \\ \vdots \\ \sum_m I_s + \sum_m GU_s \end{bmatrix}$$

G_{ii} 为与节点直接相连的电导之和, 称为节点的自导。

G_{ij} 为直接连接在节点之间支路电导之和的负值, 称为节点间的互导。在仅由独立源和二端电阻组成的网络中, $G_{ij} = G_{ji}$, 具有对称性。

$\sum_i I_s$ 为与节点相连的电流源的代数和, 流入取正号, 流出取负号。 $\sum_i GU_s$ 为与节点相连的电压源与串联电导乘积的代数和, 电压源正极性端指向节点时, 取正号, 否则取负号。两项之和称为节点源电流。

当电路中存在非二端电阻元件时, 支路电流不能用支路电导与节点电压之积表示 (如纯电压源支路), 此时需要使用改进节点电压法。根据电压源特性补充方程 $U_{ni} - U_{nj} = U_s$ 即可, 可取电压源一端为参考点从而化简。

【例题 2.10】列出图 2.27 所示电路对应不同参考点的节点电压方程, 并计算 $25\ \Omega$ 电阻消耗的功率。

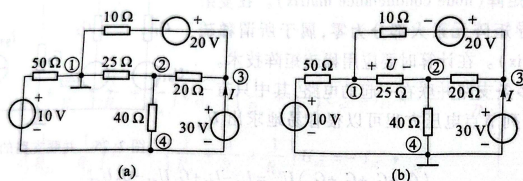


图 2.27 例题 2.10 图

【解】图 2.27 中存在一个仅含电压源的支路, 即纯电压源支路。该支路电阻为零, 不能像式 (2.38) 那样, 用节点电压来表示该支路电流。因此需将未知电流 I 设为变量列入 KCL 方程中。例如对图 2.27 (a) 所示电路, 节点①为参考点, 节点电压方程为

$$\text{节点②: } \left(\frac{1}{25\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{40\ \Omega} \right) U_{n2} - \frac{1}{20\ \Omega} U_{n3} - \frac{1}{40\ \Omega} U_{n4} = 0 \quad (1)$$

$$\text{节点③: } -\frac{1}{20\ \Omega} U_{n2} + \left(\frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} \right) U_{n3} - I = \frac{20\ \text{V}}{10\ \Omega} \quad (2)$$

$$\text{节点④: } -\frac{1}{40\ \Omega} U_{n2} + \left(\frac{1}{40\ \Omega} + \frac{1}{50\ \Omega} \right) U_{n4} + I = -\frac{10\ \text{V}}{50\ \Omega} \quad (3)$$

以上各式共含 4 个未知量, 尚需根据电压源特性列补充方程

$$U_{n3} - U_{n4} = 30\ \text{V} \quad (4)$$

图 2.8: 节点电压法

2.5 电路定理

2.5.1 置换定理

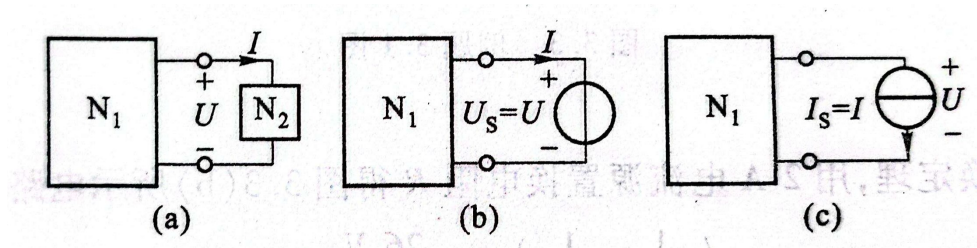


图 2.9: 置换定理

在任意线性和非线性电路中，若已知某一端口的电压和电流分别为 U 和 I ，则可以用 $U_s = U$ 的电压源或 $I_s = I$ 的电流源置换此端口，不影响电路中其他部分的电压和电流。

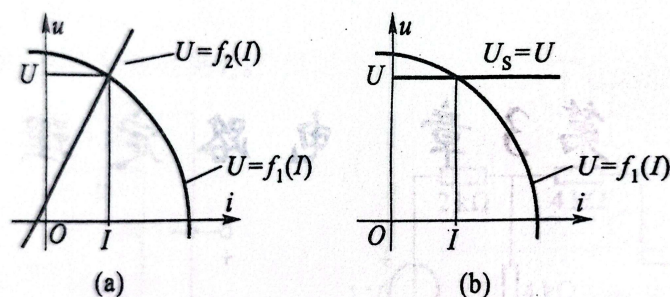


图 2.10: 置换定理的证明

证明可通过 $U-I$ 图说明，两个网络的 $U-I$ 曲线只有唯一交点，该点即为电路工作点。因此使用电压源或电流源替换时不改变交点位置，不改变工作点。

若两点间电压为零，则可以将两点短路；若某支路电流为零，则可以将该支路断开变为开路。

2.5.2 齐性定理和叠加定理

齐性定理：在只有一个激励 X 作用的线性电路中，响应为 Y ，记 $Y = f(X)$ 。将激励乘以常数 K ，则响应为原来的响应乘以 K ，即 $Y' = f(X') = f(KX) = Kf(X) = KY$ 。

叠加定理：在线性唯一解电路中，由几个独立源共同作用产生的响应等于各个独立源单独作用产生相应响应的代数叠加。

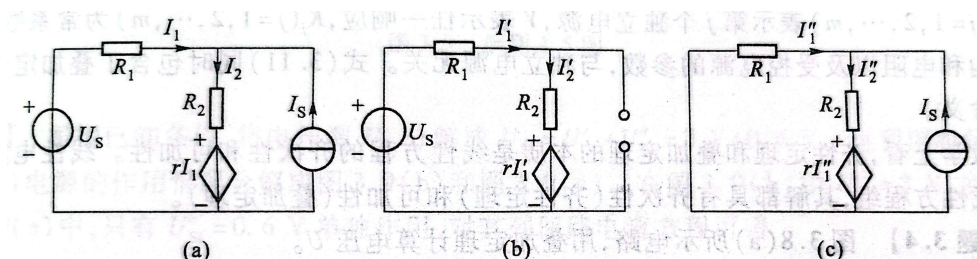


图 2.11: 叠加定理的应用示例

功率与电源的源电压和源电流不是线性关系，因此不满足叠加定理。

线性直流方程的任一响应都是该电路独立电源的线性组合, 即 $Y = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \cdots + K_m X_m$, 系数取决于电路结构和元件参数, 与独立源无关。

从数学上看, 齐性定理和叠加定理的本质是线性方程的齐次性和叠加性。

2.5.3 等效电源定理

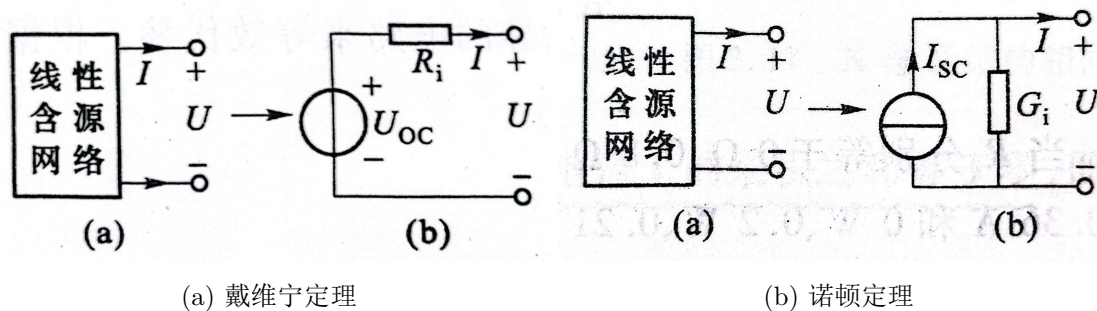


图 2.12: 电源等效定理

戴维宁定理: 线性含源一端口网络的对外作用可以用一个电压源串电阻的电路来等效代替。其中电压源电压等于网络的开路电压, 电阻等于网络内部各独立源置零后得到的无源一端口网络的等效电阻。即 $U = U_{OC} - R_i I$

诺顿定理: 线性含源一端口网络的对外作用可以用一个电流源并电导的电路来等效代替。其中电流源电流等于网络的短路电压, 电阻等于网络内部各独立源置零后得到的无源一端口网络的等效电导。即 $I = I_{SC} - G_i U$
若 $R_i = 0$ 只能等效为戴维宁电路, 若 $G_i = 0$ 只能等效为诺顿电路。

2.5.4 特勒根定理

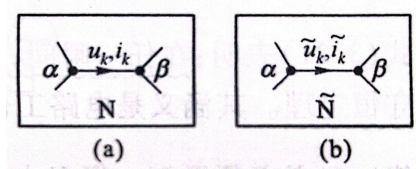


图 2.13: 特勒根定理

电路 N 中各支路电压 u_k 与电路 $\tilde{N}$ 中各对应支路电流 $\tilde{i}_k$ 的乘积之和等于零, 即 $\sum u_k \tilde{i}_k = \sum \tilde{u}_k i_k = 0$
将特勒根定理用于一个电路 N , 则得到 $\sum u_k i_k = 0$, 即功率守恒。因此特勒根定理又称似功率守恒定理。

2.5.5 互易定理

互易性电路: 回路电流方程的系数矩阵和节点电压方程的系数矩阵关于主对角线对称。

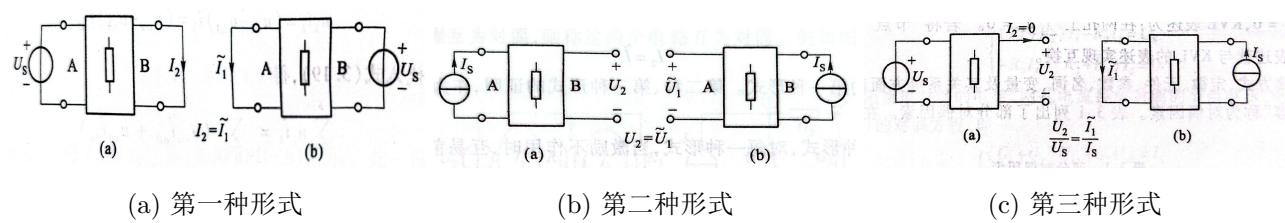


图 2.14: 互易定理

第一种形式：对于由一个独立电压源和若干线性二端电阻组成的电路，当此电压源在某一端口 A 作用时，在另一端口 B 产生的短路电流等于把此电压源移到端口 B 作用而在端口 A 所产生的短路电流。

第二种形式：对于由一个独立电流源和若干线性二端电阻组成的电路，当此电流源在某一端口 A 作用时，在另一端口 B 产生的开路电压等于把此电流源移到端口 B 作用而在端口 A 所产生的开路电压。

第三种形式：对于由独立电源和若干线性二端电阻组成的网络， N 的 A 端口外接电压源 U_s ，B 端口开路， $\tilde{N}$ 的 A 端口短路，B 端口外接电流源 I_s ，如果在数值上 $I_s = U_s$ ，则 $U_2 = \tilde{I}_1$ 。

2.5.6 对偶原理

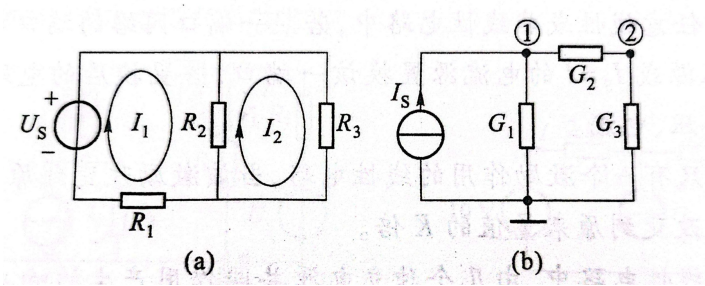


图 2.15: 对偶电路

表 1: 对偶元素

电压	电流	串联	并联
基尔霍夫电压定律	基尔霍夫电流定律	星形联结	三角形联结
电阻	电导	开路	短路
电压源	电流源	自阻	自导
电压控制电流源	电流控制电压源	互阻	互导
电压控制电压源	电流控制电流源	戴维宁定理	诺顿定理
节点	网孔	互易定理表述一	互易定理表述二

如果电路中某一定理的表述是成立的，则将其中的概念用其对偶因素置换所得的对偶表述也一定是成立的。

3 正弦电流电路分析

3.1 相量表示法

3.1.1 正弦量

按正弦规律变化的物理量称为正弦量。对于正弦电流 $i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, i 为电流瞬时值。 I_m 为电流最大值, 称为振幅或幅值, 恒为正。 ψ_i 为电流的初相, $\omega t + \psi_i$ 为电流的相位或相角。 ω 为角频率。

若周期电流 $i = f(t)$ 和直流 I 通过相同电阻 R 做功的平均效果相同, 则此直流值为周期电流的有效值。周期电流有效值是瞬时值的方根均值, 即 $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ 。对于正弦电流, 有效值 $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ 。

正弦电压和正弦电流的相位差 $(\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i$, 因此正弦量的相位差为初相之差。若相位差为零, 称为同相。相位差大于零, 称为 u 超前 i 或 i 滞后于 u , 即 u 先到达最大值。超前或滞后相角以 180° 为界限。

3.1.2 相量表示法

对于任一复数 $A_m e^{j(\omega t + \psi)}$, 存在一个正弦量是复数的实部 $A_m \cos(\omega t + \psi)$, 因此记

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}[A_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}]$$

其中 $\dot{A}_m$ 是一个复数, 且模和幅角分别为正弦量的振幅和初相, 此复值量称为相量。相量只是能代表正弦量, 但是并不等于正弦量。

相量的性质

唯一性: 同频率正弦量相等的充要条件是代表正弦量的相量相等

$$\operatorname{Re}[\dot{A}_{m1} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{A}_{m2} e^{j\omega t}] \Rightarrow \dot{A}_{m1} = \dot{A}_{m2}$$

线性性质: 同频率正弦量的线性组合的相量等于表示各正弦量相量同样的线性组合,

$$\sum b_k f(k) = \operatorname{Re}[(\sum b_k \dot{A}_{mk}) e^{j\omega t}]$$

微分规则: 正弦量时间导数的相量等于原正弦量相量乘以因子 $j\omega$

$$\frac{df(t)}{dt} = \operatorname{Re}[j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}]$$

3.2 正弦电流电路的相量分析法

3.2.1 基尔霍夫定律的相量形式

KCL: 在集中参数正弦电流电路中, 流出节点的各支路电流相量代数和等于零, 即 $\sum \dot{I} = 0$

KVL: 在集中参数正弦电路中, 沿任一回路各支路电压相量代数和等于零, 即 $\sum \dot{U} = 0$

3.2.2 阻抗和导纳

阻容感的相量模型

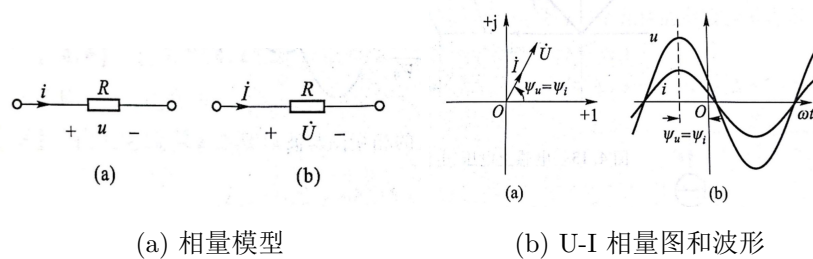


图 3.1: 电阻

电阻: $\dot{U} = R\dot{I}$, 电压与电流同相。

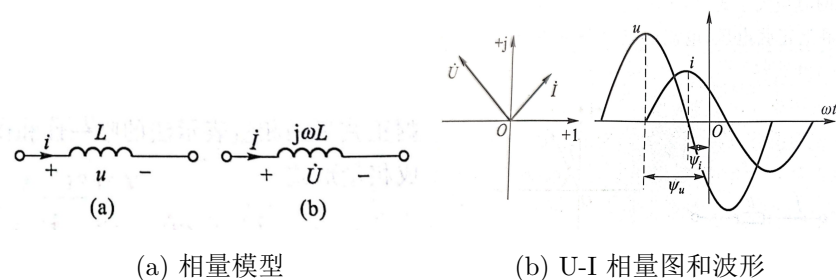


图 3.2: 电感

电感: $\dot{U} = j\omega L\dot{I}$, 电压超前电流 90° , 感抗 $X_L = \omega L$

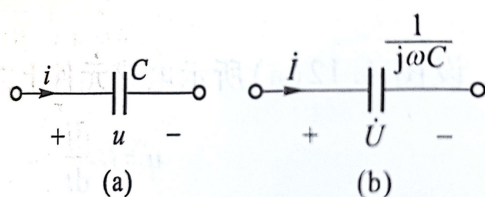


图 3.3: 电阻

电容: $\dot{U} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$, 电压滞后电流 90° , 容抗 $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

阻抗和导纳

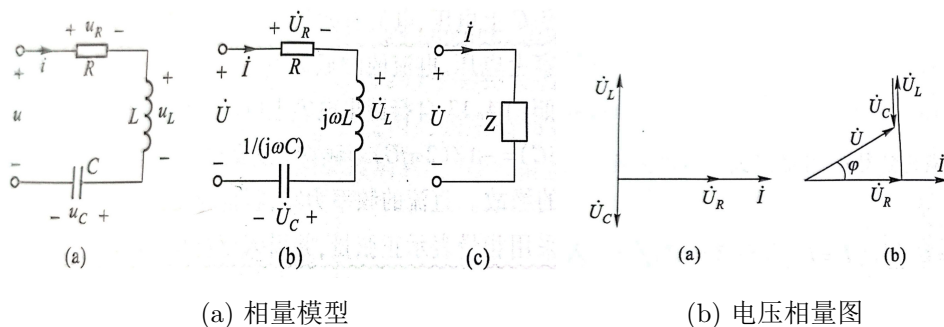


图 3.4: RLC 串联电路阻抗

阻抗 $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L + X_C) = R + jX = |Z|\angle\varphi$

$|Z| = \frac{U}{I}$, $\angle\varphi = \psi_u - \psi_i$, 电压电流有效值之比为阻抗模, 电压电流相位差为阻抗角。

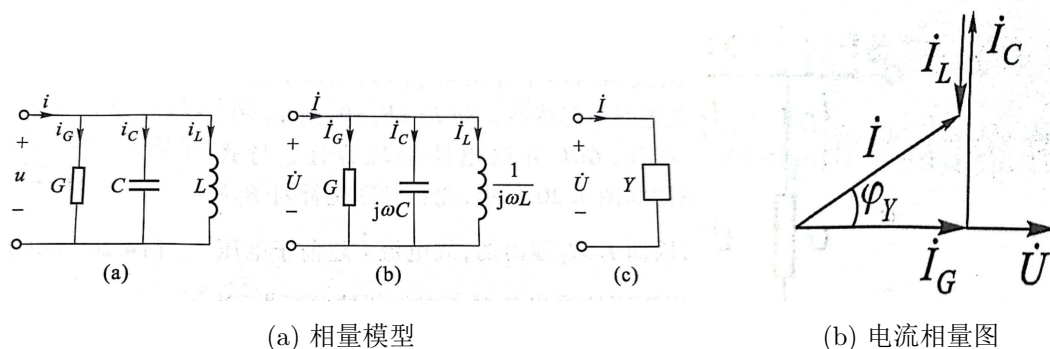


图 3.5: GLC 并联电路导纳

导纳 $Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C + B_L) = G + jB = |Y|\angle\varphi_Y$

$|Y| = \frac{I}{U}$, $\angle\varphi_Y = \psi_i - \psi_u$, 电流电压有效值之比为导纳模, 电流电压相位差为导纳角。

欧姆定律的相量形式

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U}$$

3.2.3 分析方法

将方程和公式中的电阻推广为阻抗, 将电导推广为导纳, 将恒定电压、恒定电流推广为电压、电流相量, 就可以按照直流电路的计算方法来计算正弦电流电路, 这时所列方程为复系数线性方程组。根据相量与正弦量关系, 解得相量形式解后即可求得待求电压电流的表达式。

【例题 4.12】 图 4.26 所示电路, 当 $C=0.05 \text{ F}$ 时, 电流 $i_c = 5\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ) \text{ A}$ 。求当 $C=0.25 \text{ F}$ 时的电流 i_c 。

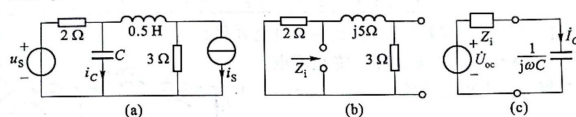


图 4.26 例题 4.12 图

【解】 将图 4.26(a) 所示电路化为相量形式的戴维宁等效电路, 如图 4.26(c) 所示。由图 4.26(b) 计算等效阻抗

$$Z_i = \frac{2(3+j5)}{2+3+j5} \Omega = (1.6+j0.4) \Omega$$

由题给已知条件及图 4.26(c) 计算等效开路电压

$$\dot{U}_{oc} = \left(Z_i + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{i}_c = (1.6+j0.4-j2) \Omega \times 5 \angle -60^\circ \text{ A} = 8\sqrt{2} \angle -105^\circ \text{ V}$$

所以当 $C=0.25 \text{ F}$ 时, 由图 4.26(c) 得电容电流相量为

$$\dot{i}_c = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{8\sqrt{2} \angle -105^\circ \text{ V}}{(1.6+j0.4-j0.4) \Omega} = 5\sqrt{2} \angle -105^\circ \text{ A}$$

进而得电流瞬时表达式 $i_c = \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \cos(10t - 105^\circ) \text{ A} = 10 \cos(10t - 105^\circ) \text{ A}$

图 3.6: 正弦电流电路的相量分析法

3.3 正弦电流电路的功率

瞬时功率: $p(t) = ui = 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$, 其中第一项为常量, 第二项以角频率随时间按余弦规律变化。

平均功率: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$, 其中 $\lambda = \cos \varphi$ 为功率因数, 表示电压超前电流相位差。

在正弦电流电路中, 同相位的电压与电流产生平均功率且等于有效值之积, 相位正交的电压与电流不产生平均功率。

无功功率: $Q = UI_Q = UI \sin \varphi$, 电流的无功分量占用设备容量。

视在功率: $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$, 表示电气设备的容量。

工程上电路多为感性, 通过并联电容器可以减小无功功率, 提高功率因数, 称为无功补偿。

复功率: $\tilde{S} = P + jQ = \dot{U} \dot{I}^*$, 其中 $\dot{I}^*$ 是电流相量 $\dot{I}$ 的共轭复量。

$$\sum \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum P_k + j \sum Q_k = 0$$

上式表明, 有功功率、无功功率、复功率都是守恒的。

负载阻抗可变时, 从电源获得最大功率的条件是 $Z_L = R_s - jX_s = \dot{Z}_s^*$, 此时称负载和电源共轭匹配, 最大功率为 $P_{Lmax} = \frac{U_s^2}{4R_s}$

阻抗角不能变时, 从电源获得最大功率条件是 $|Z_L| = |Z_s|$, 此时最大功率 $P_{Lmax} = \frac{U_s^2 \cos \varphi_L}{2|Z_s|[1 + \cos(\varphi_s - \varphi_L)]}$

3.4 耦合电感

3.4.1 互感元件

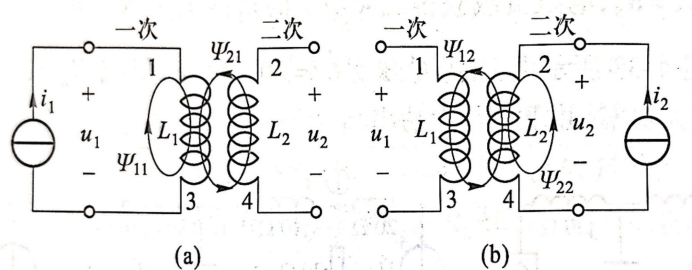


图 3.7: 磁耦合的两个线圈

几个线圈存在磁耦合时便形成了多端口电感。二端口电感习惯上称为互感元件。

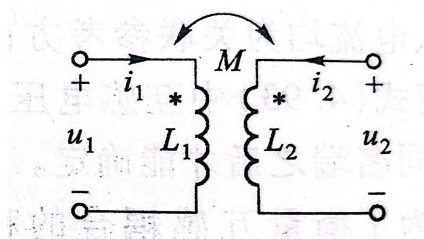


图 3.8: 互感元件符号

两个线圈不仅有自感应，还有互感应，因此总磁链与电流的关系为

$$\begin{cases} \Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \Psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

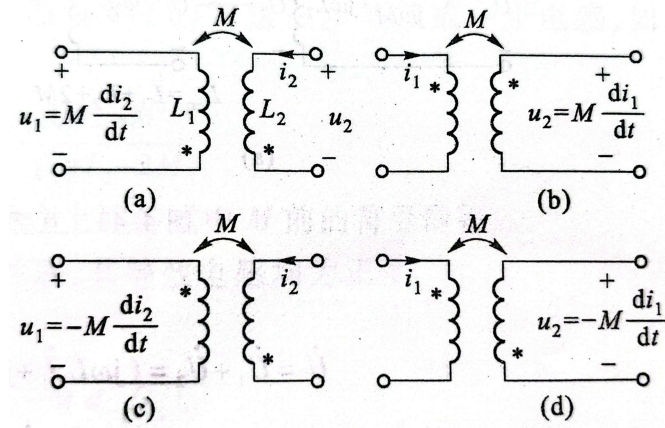


图 3.9: 互感的同名端

互感的正负号由两个线圈相对绕向决定。带有 * 标的端子为同名端。当两个线圈电流激发的自感磁链和互感磁链方向相同时，流入或流出电流的两个端子为同名端。由总磁链关系可以写出二端口的 $U - I$ 关系

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

相量形式为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

为衡量互感耦合的程度，定义耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ ， $k = 1$ 为全耦合， $k = 0$ 两线圈无磁耦合。

3.4.2 互感元件的等效电路

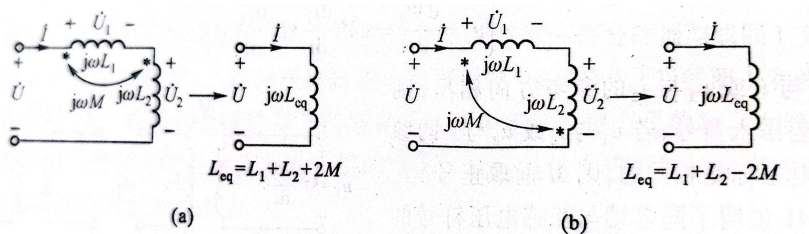


图 3.10: 互感串联

正串等效电感 $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$ ，反串等效电感 $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$

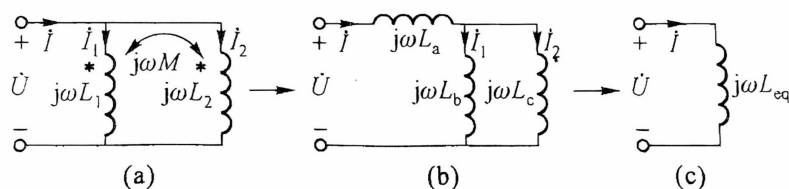


图 3.11: 互感并联

$$\text{正并联为 } L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

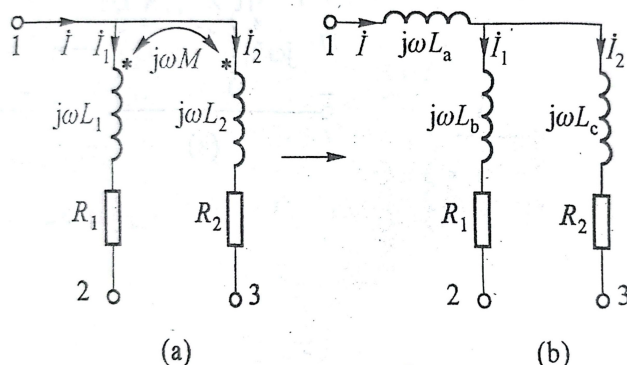


图 3.12: 互感 T 形连接

$$\text{互感的总能量 } W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

$$\text{从一次侧看二次侧等效阻抗为 } Z_{eq} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} + j\omega L_1 = Z_r + j\omega L_1, \text{ 其中 } Z_r \text{ 称为引入阻抗。}$$

3.5 理想变压器

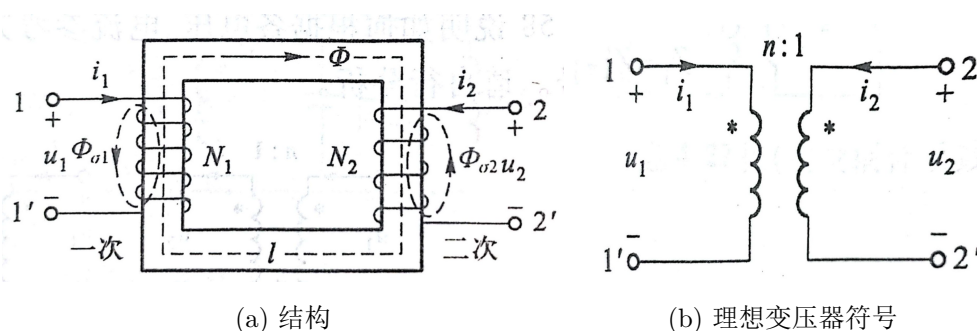


图 3.13: 变压器

理想变压器线圈绕在磁导率很高的铁磁材料铁心上, 认为磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, 且认为每个线圈漏磁通为零, 线圈的耦合系数 $k = 1$ 。

且认为每个线圈的电阻为零, 则端口电压等于感应电动势。故有

$$\dot{U}_1 = n \dot{U}_2 \quad \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / n \quad Z_i = n^2 Z_2$$

其中 $n = \frac{N_1}{N_2}$ 是变压器的变比或匝数比。

变压器输入的总功率 $p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$, 因此既不储能也不耗能, 是非能元件。

4 非正弦周期电流电路分析

4.1 非正弦周期量的分解

4.1.1 傅里叶级数分解

周期函数的傅里叶级数： $f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega t + \psi_k)$ 其中

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \psi_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k}$$

A_0 为直流分量, $A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ 为基波, $A_{mk} \cos(k\omega t + \psi_k)$ 为 k 次谐波

4.1.2 有效值和功率

$$\text{有效值: } A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

$$\text{功率: } P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

4.2 非正弦周期电流电路计算

1. 将非正弦周期激励分解为恒定分量和各正弦交流分量。
2. 分别计算各分量单独作用下的响应, 其中对于交流分量, 不同频率下电抗不同

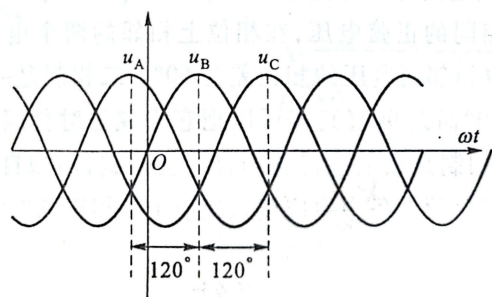
$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{1}{k} X_{C1}$$

3. 利用叠加定理把各分量的响应进行叠加。注意: 非同次谐波的相量不能直接相加减, 因为频率不同。

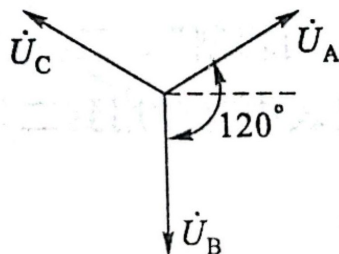
5 三相电路分析

5.1 三相电压和联结

5.1.1 三相电压



(a) 波形图



(b) 相量图

图 5.1: 三相电压

对称三相电压时域形式:

$$\begin{cases} u_A = U_m \cos(\omega t + \psi) \\ u_B = U_m \cos(\omega t + \psi - 120^\circ) \\ u_C = U_m \cos(\omega t + \psi - 240^\circ) = U_m \cos(\omega t + \psi + 120^\circ) \end{cases}$$

相量形式:

$$\begin{cases} \dot{U}_A = U_m \angle \psi \\ \dot{U}_B = U_m \angle \psi - 120^\circ \\ \dot{U}_C = U_m \angle \psi - 240^\circ \end{cases}$$

相序: 正序: $A - B - C$; 逆序: $C - B - A$; 若 $u_A = u_B = u_C$, 则为零序

5.1.2 三相联结

星形联结

电源的星形联结即是把电压源的末端 XYZ 或始端 ABC 连接在一起, 另外三个端分别引出。其中三个相连在一起的公共点称为中性点, 中性点之间的连线称为中性线, 此时为三相四线制。若三相对称, 则中性线电流等于零, 因此可以省去中性线变成三相三线制。

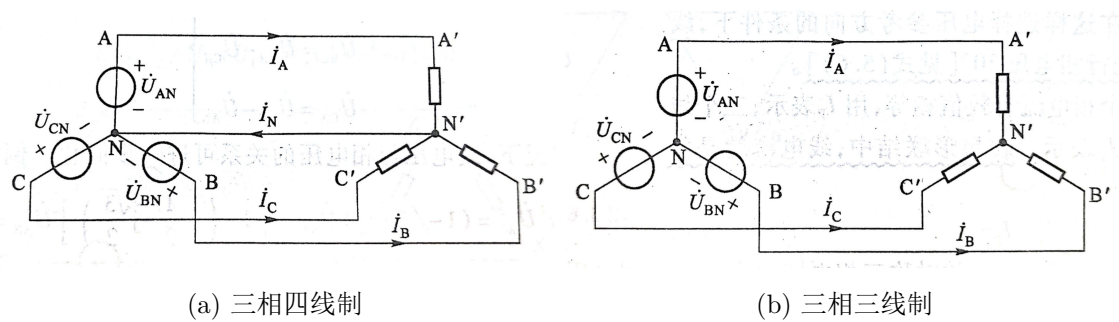


图 5.2: 三相线制

三角形联结

电源的三角形联结即把电源的始端和末端依次相连，X 接 B，B 接 C，Z 接 A，再从各连接点接出端线。这样能保证没有负载时正弦电压源内部不会有循环电流。三角形联结不存在中性线，只能用于三相三线制中。

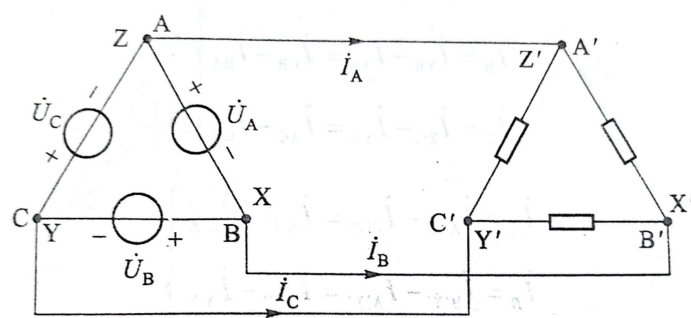


图 5.3: 三角形联结

两种联结方式的对比

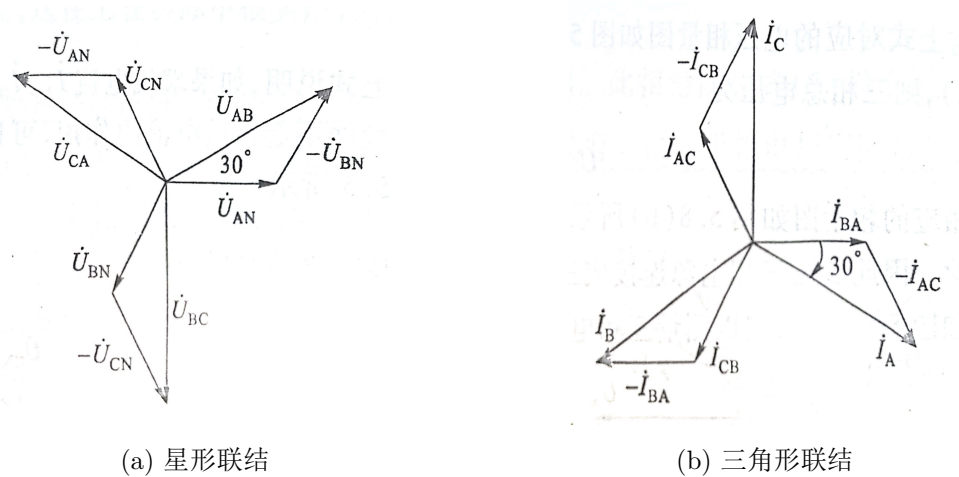


图 5.4: 不同联结线相物理量关系的相量图

表 2: 星型联结与三角形联结的对比

联结方式	星型联结	三角形联结
相量关系	$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN} = \sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle 30^\circ$ $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN} = \sqrt{3}\dot{U}_{BN}\angle 30^\circ$ $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN} = \sqrt{3}\dot{U}_{CN}\angle 30^\circ$	$\dot{I}_A = \dot{I}_{BA} - \dot{I}_{AC} = \sqrt{3}\dot{I}_{BA}\angle -30^\circ$ $\dot{I}_B = \dot{I}_{CB} - \dot{I}_{BA} = \sqrt{3}\dot{I}_{CB}\angle -30^\circ$ $\dot{I}_C = \dot{I}_{AC} - \dot{I}_{CB} = \sqrt{3}\dot{I}_{AC}\angle -30^\circ$
电压关系	$U_L = \sqrt{3}U_P$, 且 U_L 相位超前 U_P 的 30°	$U_L = U_P$
电流关系	$I_L = I_P$	$I_L = \sqrt{3}I_P$, 且 I_L 相位落后 I_P 的 30°

5.2 三相电路的计算

5.2.1 对称三相电路

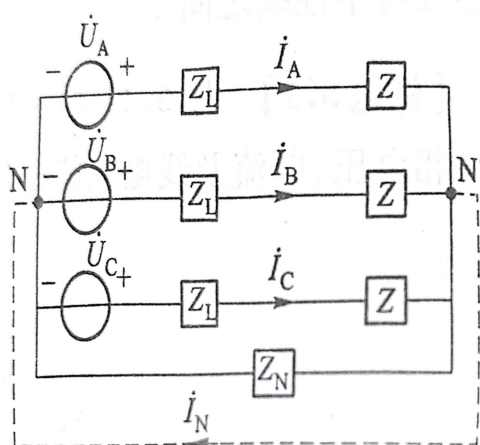


图 5.5: 对称三相电路计算图

以电源中性点 N 为参考点，对负载中性点 N' 列节点电压方程有

$$\left(\frac{3}{Z + Z_L} + \frac{1}{Z_N}\right)\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A}{Z + Z_L} + \frac{\dot{U}_B}{Z + Z_L} + \frac{\dot{U}_C}{Z + Z_L}$$

因为 $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$ ，则 $\dot{U}_{N'N} = 0$ ，故无论中性线阻抗为何值中性线压降都为零。对其中一相进行分析即可，如对 A 相和零电阻中性线列电压方程为

$$(Z + Z_L)\dot{I}_A = \dot{U}_A$$

对于三角形联结，运用角-星变换等效为星形联结后按星形联结进行计算。

5.2.2 不对称三相电路

不对称三相电路一般是负载不对称，此时需要使用一般的正弦电流电路进行分析，列出节点电压方程。此时 $\dot{U}_{N'N} \neq 0$ 。

$$\begin{cases} \dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N} \end{cases}$$

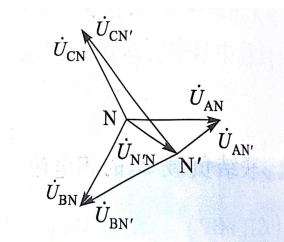


图 5.6: 中性点位移

因此负载相电压的不对称程度与中性点电压有关, 这种中性点电位不等的现象称为中性点位移。中性点位移越大, 不对称越严重, 可能造成相电压过高击穿负载或过热烧毁, 或者造成相电压过低无法工作。因此为了减小中性点位移, 应尽量减小中性线阻抗 Z_N 。若 $Z_N = 0$, 负载阻抗不对称也能保证相电压对称, 这就是广泛使用三相四线制的原因。

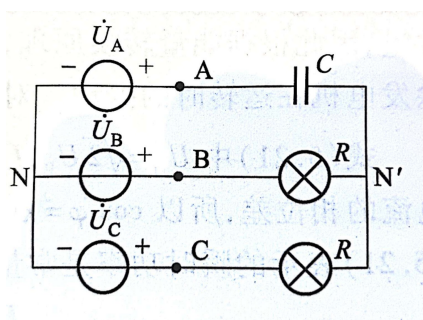


图 5.7: 相序指示器

相序指示器利用三相电路不对称来检测电路相序。满足 $\omega RC = 1$ 。中性线压降

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{j\omega C \dot{U}_{AN} + \dot{U}_{BN}/R + \dot{U}_{CN}/R}{j\omega C + 1/R + 1/R} = \frac{j + a^2 + a}{j + 1 + 1} \dot{U}_{AN} \approx (-0.2 + j0.6) \dot{U}_{AN}$$

则 B、C 两相的白炽灯电压分别为

$$\dot{U}_{BN'} \approx (1.5 \angle -101.5^\circ) \dot{U}_{AN} \quad \dot{U}_{CN'} \approx (0.4 \angle 138^\circ) \dot{U}_{AN}$$

即白炽灯较亮的一相为 B 相, 较暗的为 C 相。

5.2.3 三相电路的功率

单相瞬时功率: $p_A = u_A i_A = 0.5 U_m I_m \cos \varphi + 0.5 U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$, B 相和 C 相的瞬时功率表达式中的时间余弦函数依次滞后 240°

三相瞬时功率: $p = p_A + p_B + p_C = 1.5 U_m I_m \cos \varphi$ 。在对称三相电路中瞬时功率等于常量, 这种性质称为瞬时功率平衡, 这是三相制的优点之一。

平均功率: $P = 3 U_P I_P \cos \varphi$; 无功功率: $Q = 3 U_P I_P \sin \varphi$; 视在功率: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 U_P I_P$

6 频率响应

6.1 频率特性

设 $\dot{Y}$ 为电路网络中某一电压或某一电流， $\dot{X}$ 为单一电源的源电压或源电流，根据齐性定理有 $H(j\omega) := \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$ ，称 $H(j\omega)$ 为网络函数。

如果激励和响应属于同一端口，网络函数为该端口的等效阻抗或等效导纳。如果不属于同一端口，则称为转移函数或传递函数，根据激励和响应的不同又分为

激励	响应	转移函数
电流	电流	转移电流比
电流	电压	转移阻抗
电压	电流	转移导纳
电压	电压	转移电压比

网络函数决定于电路结构、元件参数和电源频率。当激励有效值不变时，响应随频率改变而变动，此时响应与电源频率的关系决定于网络函数与频率的关系。此时称为电路的频率响应。 $|H(j\omega)|$ 称为幅频特性， $\arg[H(j\omega)]$ 称为相频特性，以对数坐标画出幅频曲线或相频曲线，称作波特图。

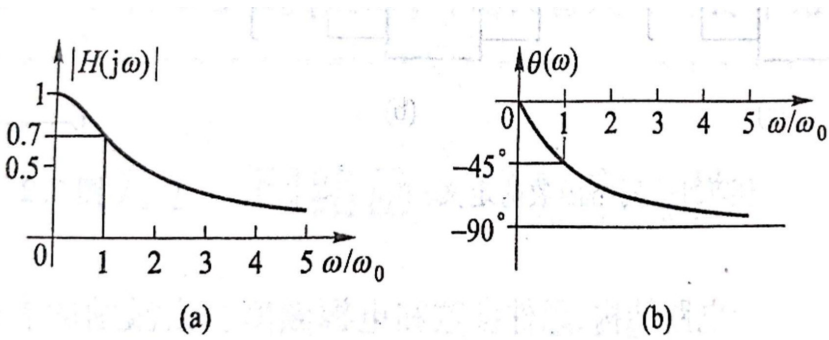


图 6.1: RC 电路的频率特性

根据允许通过的信号的频率特点分为四种特性网络：低通 LP，高通 HP，带通 BP，带阻 BS。幅频下降到 $1/\sqrt{2}$ 所对应的频率称作截止频率。幅频大于 $1/\sqrt{2}$ 的频率称作通带，其余频率称作阻带。

6.2 谐振现象

对于任何含感容的一端口电路，在一定条件下可呈现纯阻性，端口电压和电流同相位，则此一端口电路发生谐振。

6.2.1 串联谐振

谐振条件： $\text{Im}[Z] = (\omega L - 1/(\omega C)) = 0$ ，即 $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ ， ω_0 称为谐振角频率。
发生谐振时，感抗和容抗相互抵消， $\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$ 称为特性阻抗。品质因数 $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ，谐振时 $U_L = U_C = QU$ ，即电容和电感电压幅值可以远大于电源电压，但是相位相反相互抵消，端口电压没有电抗分量，因此串联谐振也称电压谐振。

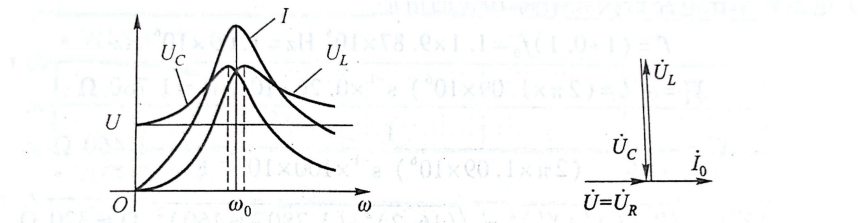
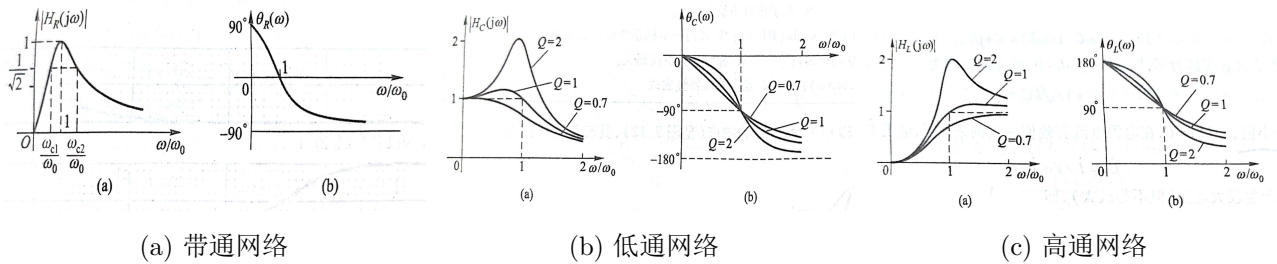


图 7.6 RLC 串联电路谐振曲线 图 7.7 RLC 串联电路谐振时的相量图

图 6.2: 串联谐振的波形图和相量图

串联谐振的频率特性



(a) 带通网络

(b) 低通网络

(c) 高通网络

图 6.3: 不同元件电压的网络特性

串联谐振电路对电阻电压为带通网络，对电容电压为低通网络，对电感电压为高通网络。

6.2.2 并联谐振

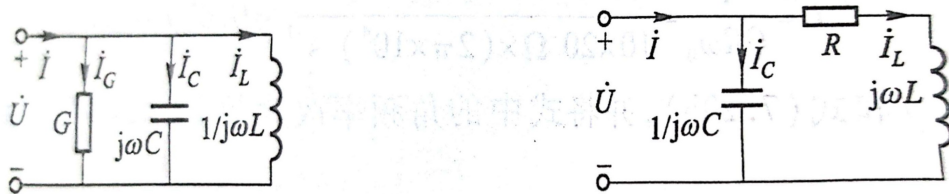


图 6.4: 并联谐振的两种电路结构

GLC 并联谐振条件: $\text{Im}[Y] = (\omega C - 1/(\omega L)) = 0$, 即 $\omega_0 C = 1/\omega_0 L$, ω_0 称为谐振角频率。品质因数 $Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G\omega_0 L} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 。谐振时 $I_L = I_C = QI$ 电感和电容的电流可以远大于电源电流，但是相位相反相互抵消，端口电流没有电抗电流分量，因此也称并联谐振。

线圈并联电容器构成的谐振电路的谐振条件: $\text{Im}[Y] = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$ 。

- 谐振电容 $C_0 = \frac{L}{R^2 + (\omega_0 L)^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$ 为谐振角频率。若 $R > \sqrt{L/C}$, 保持容性不存在谐振。
- 谐振电感 $L_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2 C^2 R^2}}{2\omega^2 C}$, 当 $R > 1/(2\omega C)$ 时, 不存在改变电感能达到谐振的条件。
- 谐振的等效电阻 $R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} = R + \frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) = \frac{L}{RC}$, 电阻越小谐振阻抗越大, 但是谐振时的等效阻抗并不是最大阻抗。当 ω 略大于 ω_0 时导纳最小阻抗最大。

7 电路暂态过程分析

7.1 电路量的初始值

换路定律

若换路期间电容电流 i_C 有界, 则 $q(0_+) = q(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$;

若换路瞬间电感电压 u_L 有界, 则 $\Psi(0_+) = \Psi(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

换路定律: 电容电流和电感电压有界时, 电容电荷和电压、电感电流和磁链是连续的 (渐变的)。

对于只有电容和电压源的回路, 电容上的电荷可以发生突变, 此时需要使用电荷守恒求解初值。

对于冲激信号等奇异信号, 电路量不一定有界, 换路定律会失效。

其他电路量的分析

换路瞬间, 电容相当于电压源 $u_s(0_+) = u_C(0_+)$, 电感相当于电流源 $i_s(0_+) = i_L(0_+)$, 替换后分析电路即可得到其他电压电流的初值。

7.2 一阶电路的响应

7.2.1 零输入响应

换路后无独立电源, 仅由储能原件原始储能引起的响应。

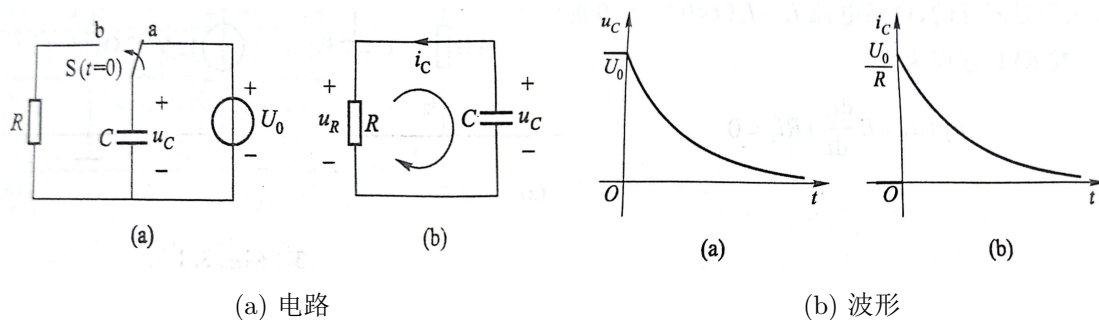


图 7.1: RC 电路的零输入响应

$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, ($t \geq 0$), 其中 $\tau = RC$ 称为 RC 电路的时间常数, $3\tau \sim 5\tau$ 时间后可以认为放电结束。

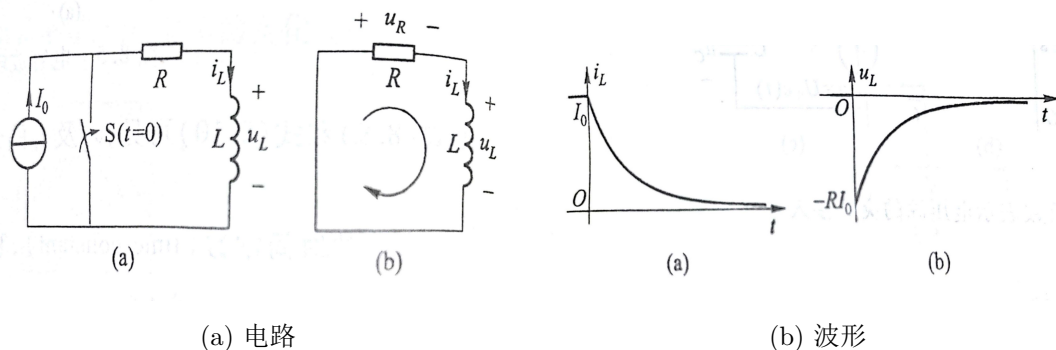


图 7.2: RL 电路的零输入响应

$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, ($t \geq 0$), 其中 $\tau = \frac{L}{R}$ 称为 LC 电路的时间常数

7.2.2 零状态响应

电路中原始储能为 0，仅由独立电源作用引起的响应。

阶跃响应

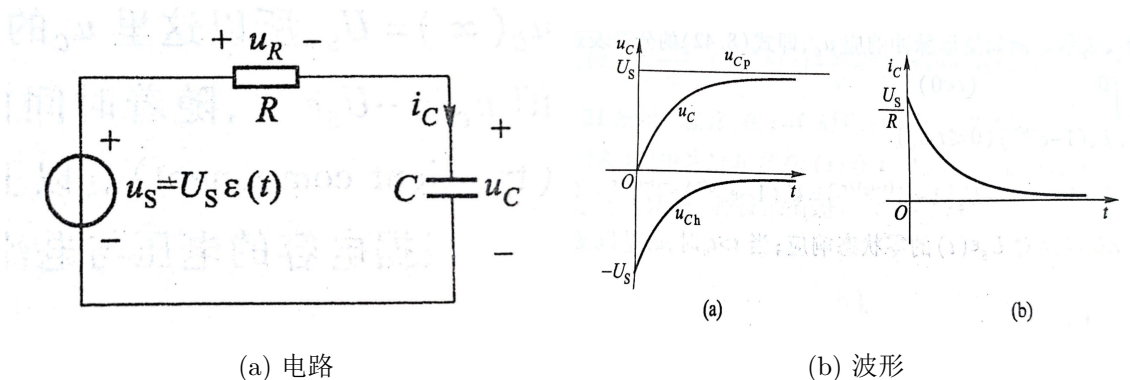


图 7.3: RC 电路的零状态阶跃响应

阶跃电压源: $u_S = U_S \varepsilon(t)$

$u_C = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})(t \geq 0)$, 引入阶跃函数后, $u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$

单位阶跃特性: $s(t) = \frac{u_C(t)}{U_S} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$

冲激响应

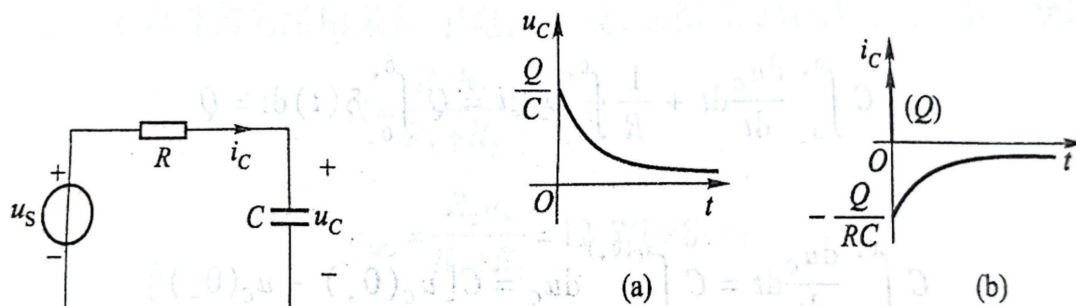


图 7.4: RC 电路的零状态冲激响应

冲激电压源: $u_S = \Psi \delta(t)$

$u_C = U e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t), i_C = Q \delta(t) - \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$

单位冲激特性: $h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$

正弦电源响应

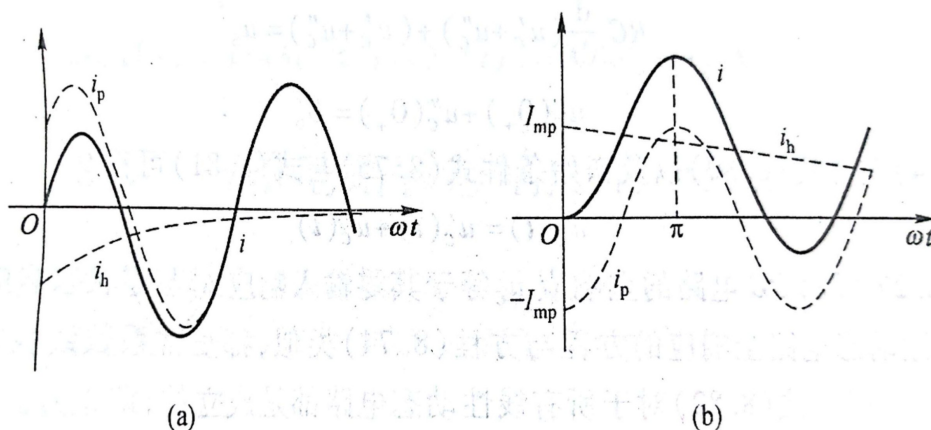


图 7.5: 正弦电源作用下 RC 电路的零状态响应

正弦电压源: $u_S = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$, 其中 ψ_u 称为接入相角, 为 $t = 0$ 时刻 u_S 的相位

特解可以为正弦稳态解, $i_p = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi_Z)$

则解为 $i = \frac{U_m}{|Z|} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi_Z) - \frac{U_m}{|Z|} \cos(\psi_u - \varphi_Z) e^{-\frac{t}{\tau}}$

7.2.3 全响应

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 = 强制分量 + 自由分量

三要素法: $f(t) = f_p(t) + (f(0_+) - f_p(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$, 其中 $f_p(t)$ 为特解, τ 为时间常数, $f(0_+)$ 为初值

卷积积分法: $y(t) = x(t) * h(t)$

7.3 二阶电路的暂态过程

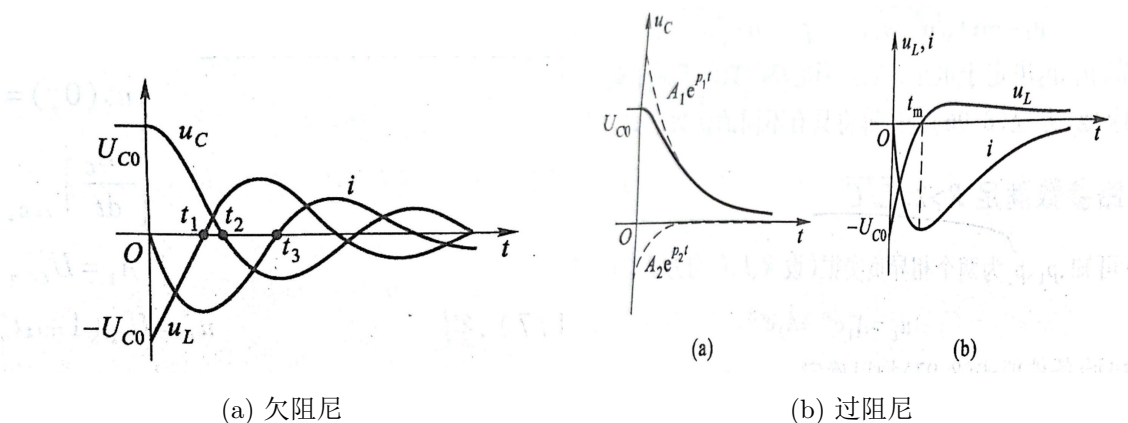


图 7.6: RLC 二阶电路的响应

$R > 2\sqrt{L/C}$, 非振荡过程或过阻尼过程; $R < 2\sqrt{L/C}$, 振幅按指数规律衰减的正弦函数, 振荡过程或欠阻尼过程; $R = 2\sqrt{L/C}$, 临界状态, 非振荡。

7.4 状态变量分析

u_C, i_L 为电路的状态变量, 由状态变量及其一阶导数组成的一阶微分方程组称为状态方程。

$\dot{X} = AX + BV$, 其中

$$\mathbf{X} = [u_{C1}, u_{C2}, \dots, i_{L1}, i_{L2}, \dots]^T, \dot{\mathbf{X}} = [\dot{u}_{C1}, \dot{u}_{C2}, \dots, \dot{i}_{L1}, \dot{i}_{L2}, \dots]^T, \mathbf{V} = [u_{S1}, u_{S2}, \dots, i_{S1}, i_{S2}, \dots]^T$$

而系数矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 由电路参数决定。

输出方程: $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{Y} = [u_1, u_2, \dots, i_1, i_2, \dots]^T$

7.5 复频域分析

7.5.1 拉普拉斯变换

正变换: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

其中 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数, 积分下限取 0_- 是考虑到 $f(t)$ 可能含有冲激函数 $\delta(t)$ 的作用, $s = \sigma + j\omega$, 具有时间的倒量纲即频率的量纲, 称为复频率。

逆变换: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$

拉式逆变换利用部分分式法将有理函数展成最简分式, 利用基本拉氏变换对变换。

常用的 Laplace 变换对

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

Laplace 变换的性质

- 线性性质: $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$
- 微分性质: $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0_-)$
- 积分性质: $\mathcal{L}\left\{\int_{0_-}^t f(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- 延迟性质: $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\} = e^{-st_0}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- 位移性质: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- 初值定理: $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- 终值定理: $sF(s)$ 的所有奇点都在 s 的左半平面, $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
- 卷积定理: $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$

7.5.2 复频域的电路模型

基尔霍夫定律

KCL: 集中参数电路中, 流出或流入任意节点的各支路电流象函数代数和为零, 即 $\sum I_k(s) = 0$

KVL: 集中参数电路中, 沿任一回路各支路电压象函数代数和为零, 即 $\sum U_k(s) = 0$

元件方程

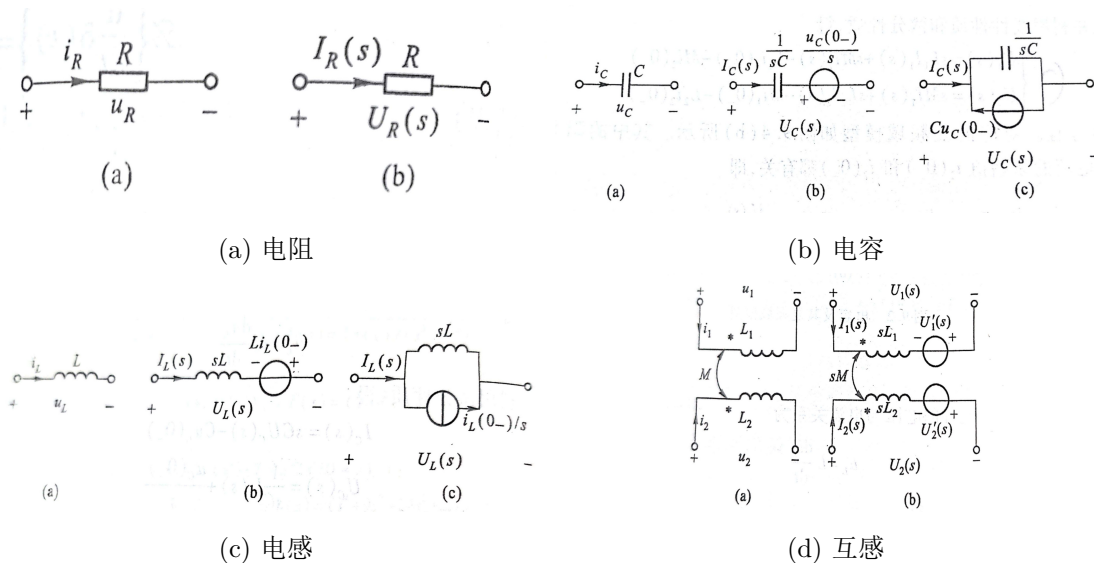


图 7.7: 阻容感元件的复频域模型

1. 电阻: $U(s) = RI(s)$ 2. 电容: $U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$, 运算容抗 $1/(sC)$, 附加电压源 $u_C(0_-)/s$ 3. 电感: $U(s) = sLI(s) - Li_L(0_-)$, 运算感抗 sL , 附加电压源 $Li_L(0_-)$ 4. 互感:
$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1I_1(s) + sMI_2(s) - L_1i_1(0_-) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sMI_1(s) + sL_2I_2(s) - Mi_1(0_-) - L_2i_2(0_-) \end{cases}$$

运算电路

将电路所有元件均用复频域模型表示, 得到的电路模型称为原电路的复频域电路模型或运算电路。

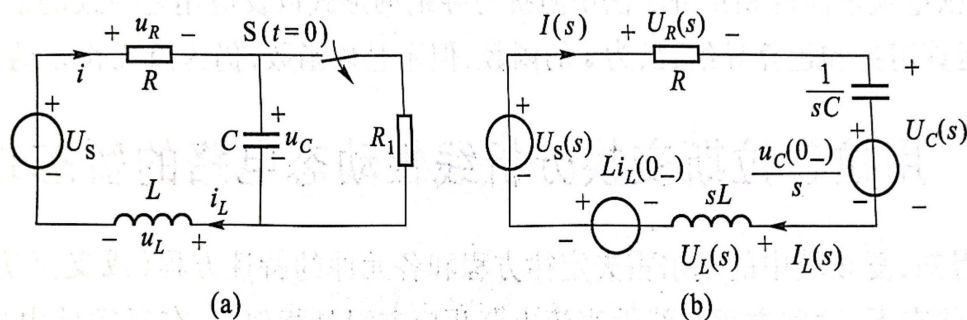


图 7.8: RLC 串联电路的运算电路

RLC 串联的运算阻抗 $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$, 运算导纳 $Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$, 运算阻抗和运算导纳都不是象函数, 具有阻抗和导纳的量纲。

7.5.3 复频域分析方法

1. 由换路前电路求出电容的 $u_C(0_-)$ 和电感的 $i_L(0_-)$, 将激励变换为象函数。

2. 根据换路后电流画出运算电路, 将初值作用用附加电源表示, 参数用复频域运算阻抗表示。
3. 将求解直流电路的方法推广到运算电路, 求出响应的象函数。
4. 将象函数进行拉式反变换求出象函数的原函数。

【例题 9.12】 设图 9.10 所示电路中, $R=1\ \Omega$, $L=1\ \text{H}$, $C=0.2\ \text{F}$, $g=1\ \text{S}$, $u_s=6\epsilon(t)\ \text{V}$, $i_s=4C\times\delta(t)$ 。试求 $t>0$ 时的零状态响应 u_L 及 u_C 。

【解】 电路为零状态, 其复频域模型中不含附加电源, 列节点电压方程如下

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R}\right) U_1(s) - \frac{1}{R} U_C(s) = \frac{U_s(s)}{sL} - gU_C(s) \\ -\frac{1}{R} U_1(s) + \left(sC + \frac{1}{R}\right) U_C(s) = I_s(s) \end{cases} \quad (1)$$

其中电源的象函数为

$$U_s(s) = \mathcal{L}\{u_s\} = \frac{6}{s}\ \text{V}, \quad I_s(s) = \mathcal{L}\{i_s\} = 4\ \text{A} \cdot s$$

将已知条件代入式(1), 得

$$\begin{cases} (s+1)U_1(s) = \frac{6}{s} \\ -U_1(s) + (0.2s+1)U_C(s) = 4 \end{cases} \quad (2)$$

联立解得

$$\begin{cases} U_1(s) = \frac{6}{s(s+1)} \\ U_C(s) = \frac{20s^2 + 20s + 30}{s(s+1)(s+5)} \end{cases} \quad (3)$$

$U_L(s)$ 及 $U_C(s)$ 的展开式为

$$U_L(s) = U_s(s) - U_1(s) = \frac{6}{s+1}$$

$$U_C(s) = \frac{6}{s} + \frac{-7.5}{s+1} + \frac{21.5}{s+5}$$

逆变换得所求响应为

$$u_L = \mathcal{L}^{-1}\{U_L(s)\} = 6e^{-t}\ \text{V} \quad (t>0)$$

$$u_C = \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} = (6 - 7.5e^{-t} + 21.5e^{-5t})\ \text{V} \quad (t>0)$$

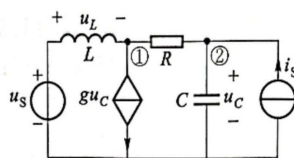


图 9.10 例题 9.12 图

图 7.9: 复频域分析暂态过程

7.5.4 网络函数

网络零状态响应的象函数 $Y(s)$ 和激励的象函数之比为网络函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

由于 $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, 因此单位冲激特性的象函数 $Y(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$, 即网络函数是单位冲激特性的象函数。

若网络函数仅含一阶极点, 则可展开为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k}$$

其中极点 p_k 称为网络函数的自然频率, 只与网络结构和参数有关。

网络的单位冲激特性为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

极点的位置决定了不同的响应分量，具体如下

序号	网络函数	极点在 s 平面上的位置	单位冲激特性波形	单位冲激特性表达式 $h_k(t)$
1	$\frac{A_k}{s}$			A_k
2	$\frac{A_k}{s-p_k}$ ($p_k < 0$)			$A_k e^{p_k t}$
3	$\frac{A_k}{s-p_k}$ ($p_k > 0$)			$A_k e^{p_k t}$
4	$\frac{A_k + \frac{\dot{A}_k}{s}}{s-j\beta_k + s+j\beta_k}$ ($A_k = A_k / \theta_k$)			$2 A_k \cos(\beta_k t + \theta_k)$
5	$\frac{A_k + \frac{\dot{A}_k}{s}}{s-p_k + s-p_k}$ ($p_k = \alpha_k + j\beta_k$, $\alpha_k < 0, \beta_k > 0$) $A_k = A_k / \theta_k$)			$2 A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \theta_k)$
6	$\frac{A_k + \frac{\dot{A}_k}{s}}{s-p_k + s-p_k}$ ($p_k = \alpha_k + j\beta_k$, $\alpha_k > 0, \beta_k > 0$) $A_k = A_k / \theta_k$)			$2 A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \theta_k)$

图 7.10: $H(s)$ 极点位置与单位冲激特性的关系

8 二端口网络

8.1 参数矩阵和参数方程

导纳参数方程 ($\mathbf{Y}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

短路导纳参数:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} \quad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$$

阻抗参数方程 ($\mathbf{Z}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

开路阻抗参数:

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} \quad Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} \quad Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \quad Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}$$

其中 $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ 。

传输参数方程 ($\mathbf{A}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

传输参数:

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad A_{12} = -\frac{1}{Y_{21}} \quad A_{21} = Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} \quad A_{22} = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

$$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0} \quad A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0} \quad A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

逆传输参数方程 ($\mathbf{B}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

其中, 由于输入列向量的电流项带有负号, $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}^{-1}$ 。

混合参数方程 ($\mathbf{H}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

混合参数:

$$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}} \quad H_{12} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \quad H_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad H_{22} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}}$$

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \quad H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}$$

逆混合参数方程 ($\mathbf{G}$ 参数矩阵)

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$ 。

8.2 二端口网络的等效电路

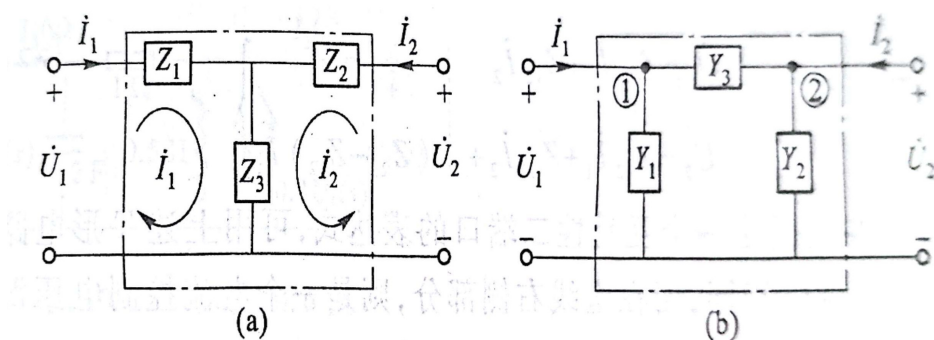


图 8.1: 互易二端口的等效电路

T 形等效参数可以由 Z 参数矩阵得

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} \quad Z_2 = Z_{22} - Z_{12} \quad Z_3 = Z_{12}$$

Π 形等效参数可以由 Y 参数矩阵得

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12} \quad Y_2 = Y_{22} + Y_{21} \quad Y_3 = -Y_{12}$$

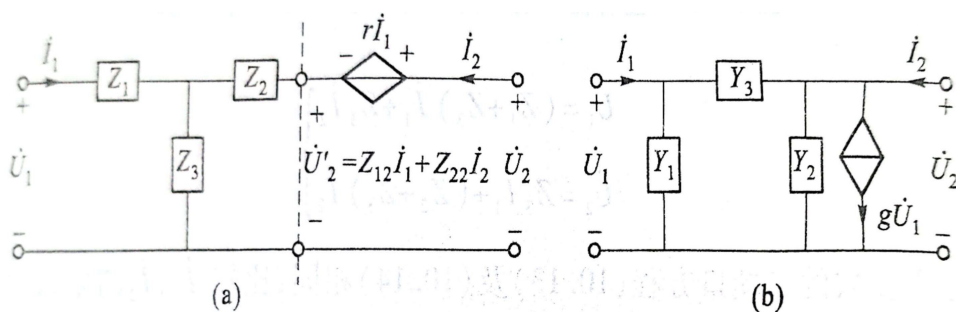


图 8.2: 非互易二端口的等效电路

T 形等效参数可以由 Z 参数矩阵得

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} \quad Z_2 = Z_{22} - Z_{12} \quad Z_3 = Z_{12} \quad r = Z_{21} - Z_{12}$$

相比对称二端口多了一个流控电压源。

Π 形等效参数可以由 Y 参数矩阵得

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12} \quad Y_2 = Y_{22} + Y_{21} \quad Y_3 = -Y_{12} \quad g = Y_{21} - Y_{12}$$

相比对称二端口多了一个压控电流源。

8.3 二端口网络与电源负载的连接

列出二端口方程、电源支路方程和负载支路方程联立求解。

$$\text{输入阻抗: } Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}}$$

开路电压: $\dot{U}_{oc} = \frac{\dot{U}_S}{A_{21}Z_S + A_{11}}$

输出阻抗: $Z_o = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{A_{22}Z_S + A_{12}}{A_{21}Z_S + A_{11}}$

特性阻抗: $Z_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}$, $Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{11}A_{21}}}$, 当 $Z_S = Z_{c1}$, $Z_L = Z_{c2}$ 时, 二端口网络与电源和负载匹配。

对于对称二端口网络, $A_{11} = A_{22}$, 则 $Z_{c1} = Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = Z_c$

处于匹配连接时, $\dot{U}_1 = (A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}})\dot{U}_2 = \dot{U}_2 e^{\Gamma}$, 其中 Γ 称为传输系数,

$$\Gamma = \ln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right) = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \alpha + j\beta$$

称 $\alpha = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$ 为衰减系数, 称 $\beta = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}$ 为相位系数。

8.4 二端口网络的连接

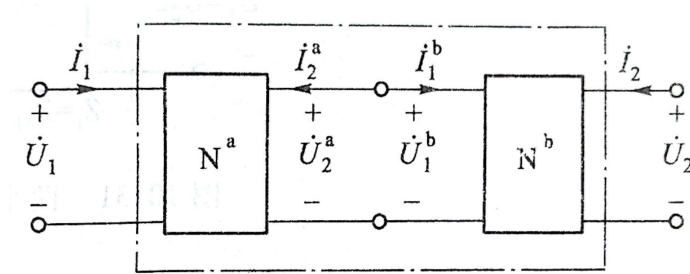


图 8.3: 二端口的级联

级联: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, 若每一级网络都是对称二端口网络且参数完全相同, 则 $\Gamma = n\Gamma_1$, $Z_c = Z_{c1}$ 。

串联: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$; 并联: $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$; 串并联: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$; 并串联: $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$

9 非线性电阻电路

多数非线性电阻元件难以得到特性的解析表达式，通常用曲线或数据表描述。

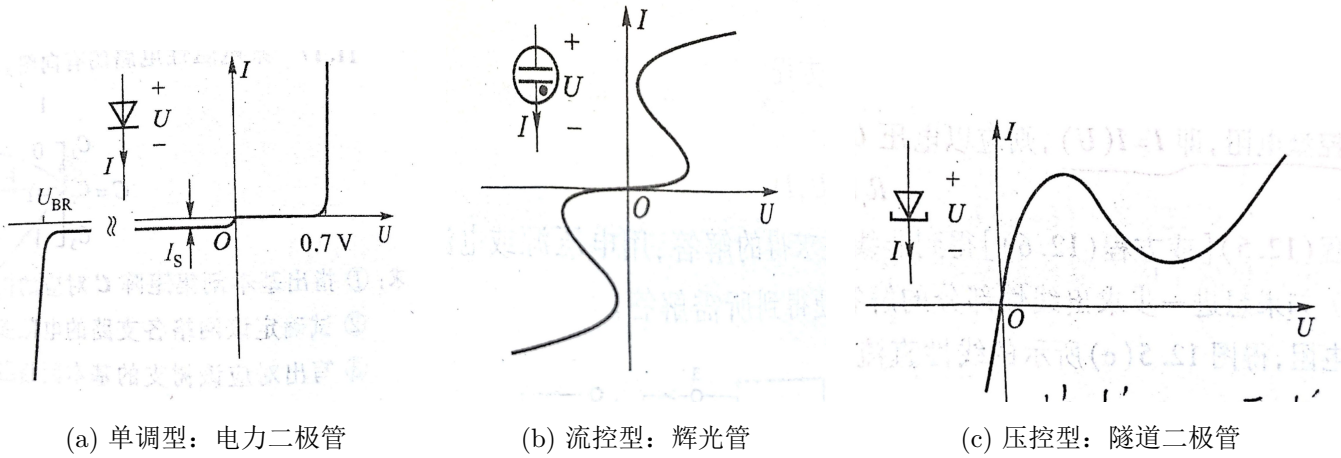


图 9.1: 三种非线性电阻特性

电压和电流是单调关系的非线性电阻称为单调非线性电阻。电压是电流的单值函数的电阻称为电流控制非线性电阻，同一电压可能对应多个电流。电流是电压的单值函数的电阻称为电压控制非线性电阻，同一电流可能对应多个电压。

9.1 非线性直流电路方程

9.1.1 电路方程列写

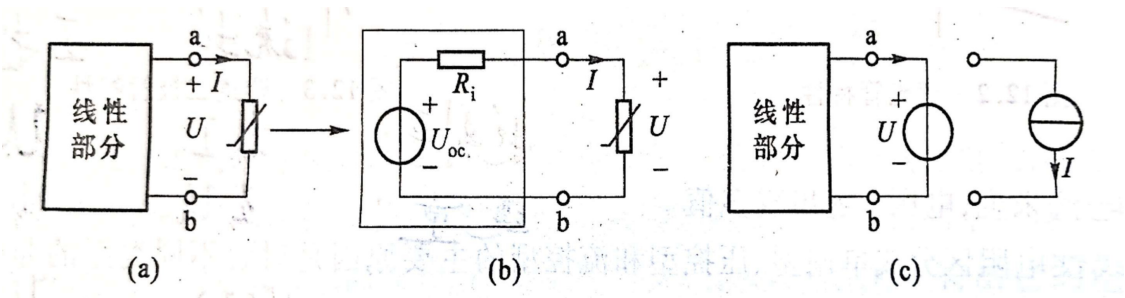


图 9.2: 只含有一个非线性元件的非线性直流电路的方程列写

只含有一个非线性电阻的电路，可以将电路划分成线性和非线性两部分。线性部分利用线性电路的戴维宁定理或诺顿定理进行化简。若为流控型电阻，以电流 I 为变量列写 KVL 方程 $R_i I + U(I) = U_{oc}$ ；若为压控型电阻，以电压 U 为变量列写 KVL 方程 $R_i I(U) + U = U_{oc}$ 。

若含有较多的非线性电阻，或需计算较多的电压电流，则需要对电路列写方程组。建立方程时，应以控制量作为方程的待求量。

9.1.2 数值分析法

非线性电阻特性解析式如果比较复杂，一般难以直接求解联立方程组。一般采用计算机程序计算出电路方程的数值结果，采用牛顿-拉夫逊（Newton-Raphson）法进行迭代求解。

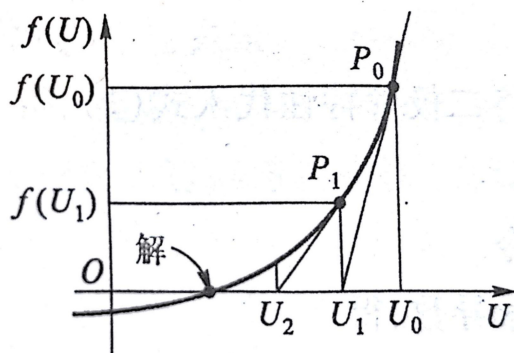


图 9.3: Newton-Raphson 法原理

对于压控型电阻, 令 $f(U) = I(U) - I_{se} + G_i U$ 。假设一电压值 (即初值) U_0 代入 $f(U)$ 求出 $f(U_0)$, 对应 P_0 点。在该点作切线, 与 U 轴交点即为 U_1 , U_1 比 U_0 更接近方程的解。然后用 U_1 代替 U_0 重复上述步骤得到电压递推序列

$$U_0, U_1, U_2, \dots, U_k, U_{k+1}, \dots$$

电压递推的迭代公式是

$$U_{k+1} = U_k - \frac{f(U_k)}{f'(U_k)}$$

每一步迭代都需要判断相继两次迭代值绝对误差是否在容许误差范围内, 即判断

$$\Delta U = |U_{k+1} - U_k| < \varepsilon$$

是否成立。若成立, 则结束, 此时迭代收敛, U_{k+1} 即为 U 的近似数值解。

9.2 特性曲线求解

9.2.1 分段线性近似法

分段线性近似法用一条折线来分段逼近特性曲线, 也称为折线法。

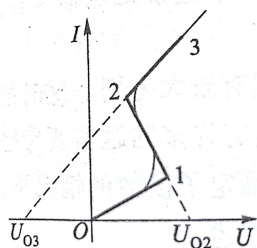


图 9.4: 分段线性近似法图示

对于流控电阻的 S 形曲线, 每一段直线的表达式为 $U = U_{Ok} + R_{dk}I$, 其中 U_{Ok} 是第 k 段直线和 U 轴交点坐标, R_{dk} 是第 k 段直线的斜率

$$R_{dk} = \left(\frac{dU}{dI} \right)_k$$

具有电阻量纲, 反映电压、电流变化量之间的关系, 因此称为动态电阻。与之相对应 $R = U/I$ 称为静态电阻。

在不同区间段, 可以使用不同量值的电压源串线性电阻模型求解。需要注意的是每一段的解答都需要检查是否位于该区段, 不位于该区段则该解为虚解。

9.2.2 图解法

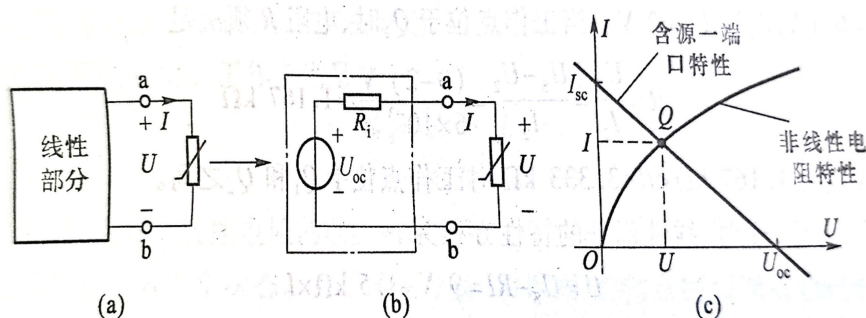


图 9.5: 图解法求解过程

将线性部分进行戴维宁等效，画出戴维宁电路的输出端口方程 $U = U_{oc} - R_i I$ ，为一条通过开路工作点和短路工作点的直线，此线为负载线。在非线性电阻上，电压电流必须满足给定的特性曲线。则特性曲线和负载线的交点就是同时满足端口约束的端口电压电流的解答，该点 Q 称为静态工作点。计算其他部分的电压电流，可使用置换定理替换非线性电阻后用线性电路的分析方法分析。

9.3 小信号分析法

适用于分析既有直流电源又有时变电源，且时变激励源幅值相对于直流激励源来说小很多的非线性电路。电路方程如下

$$u = U_s + \Delta u_s - R_s i$$

当 $\Delta u_s = 0$ 时， $u = U_s - R_s i$ 为直流电源作用，由图解法可确定静态工作点。

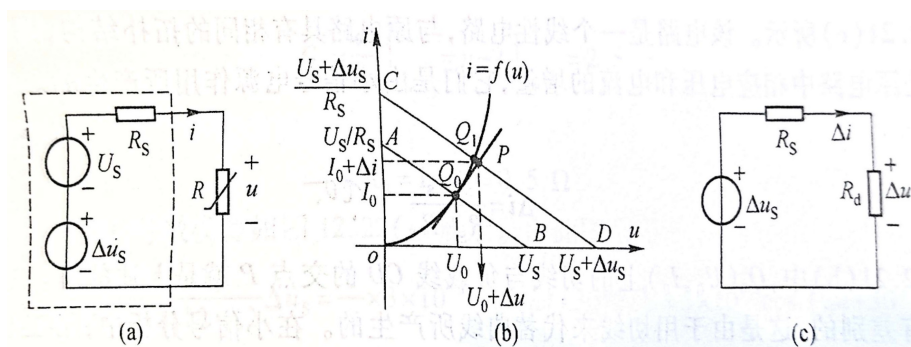


图 9.6: 小信号分析法

当 $\Delta u_s \neq 0$ 时，由于 $U_s \gg |\Delta u_s|$ ，因此非线性电阻的电压电流沿特性曲线在工作点附近变动，可以用切线代替非线性的特性曲线进行分析，此即为小信号分析法。此时切线方程为

$$i = I_0 + f'(U_0)(u - U_0)$$

其中 $f'(U_0) = \frac{di}{du}|_{u=U_0} = G_d = 1/R_d$ ，称为动态电导，倒数称为动态电阻。则此时交变量

$$\Delta u = R_d \Delta i$$

原方程可写为

$$U_0 + \Delta u = U_s + \Delta u_s - R_s(I_0 + \Delta i)$$

10 均匀传输线

原参数

$R_0(L_0)$, 两根均匀传输线（往返）每单位长度具有的电阻（电感）；

$G_0(C_0)$, 两根均匀传输线之间每单位长度具有的电导（电容）。

电报方程

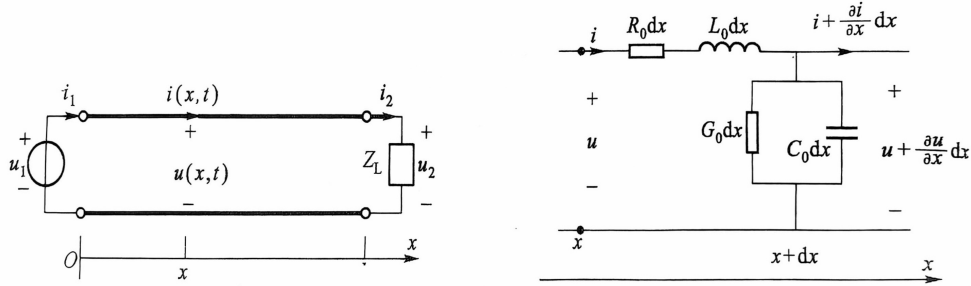


图 10.1: 均匀传输线的微段电路模型

设均匀传输线由无穷多微分段级联组成，微段 dx 的电压电流方程为：

$$\begin{cases} u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = (R_0 dx) i + (L_0 dx) \frac{\partial i}{\partial x} \\ i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = G_0 dx (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + C_0 dx \frac{\partial}{\partial x} (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial x} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

10.1 正弦稳态分析

10.1.1 正弦稳态解

正弦激励的均匀传输线达到稳态时， $u(x, t) = \text{Re}[\sqrt{2}\dot{U}(x)e^{j\omega t}]$, $i(x, t) = \text{Re}[\sqrt{2}\dot{I}(x)e^{j\omega t}]$

则电报方程变形得：

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}(x) = \gamma^2 \dot{U}(x) \\ \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I}(x) = \gamma^2 \dot{I}(x) \end{cases}$$

其中 $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ 称为传播常数， α 称为衰减常数， β 称为相位常数。

设 $Z_c = \frac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$ ，称为波阻抗或特性阻抗，具有电阻的量纲。

通解为

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} \end{cases}$$

边界条件确定的特解

若始端 $\dot{U}(0) = \dot{U}_1, \dot{I}(0) = \dot{I}_1$, 则

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cosh \gamma x - \dot{I}_1 Z_c \sinh \gamma x \\ \dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sinh \gamma x + \dot{I}_1 \cosh \gamma x \end{cases}$$

若终端 $\dot{U}(l) = \dot{U}_2, \dot{I}(l) = \dot{I}_2$, 设 $x' = l - x$, 则

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cosh \gamma x' + \dot{I}_2 Z_c \sinh \gamma x' \\ \dot{I}(x') = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sinh \gamma x' + \dot{I}_2 \cosh \gamma x' \end{cases}$$

10.1.2 行波

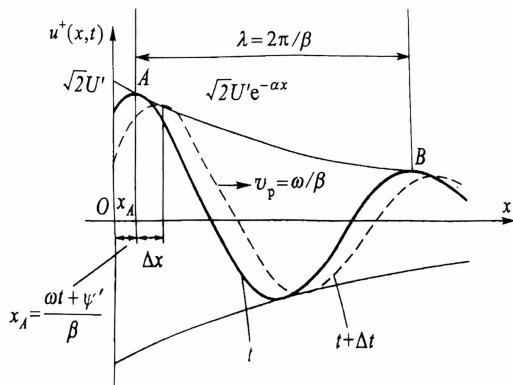
正弦稳态解的形式可以改写为

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) \\ \dot{I}(x) = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) \end{cases}$$

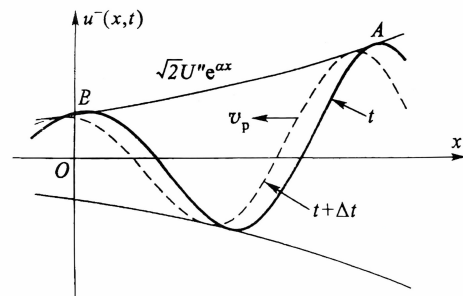
通解的两项分别为正向行波和反向行波, 波速 $v_p = \frac{\omega}{\beta}$, 行波满足 $\frac{\dot{U}^+(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{I}^-(x)} = Z_c$

若通解中 $A_1 = U' e^{j\psi'}$, $A_2 = U'' e^{j\psi''}$, 则

$$\dot{U}(x) = \sqrt{2}U' e^{ax} \cos(\omega t - \beta x + \psi') + \sqrt{2}U'' e^{ax} \cos(\omega t + \beta x + \psi'')$$



(a) 正向行波



(b) 反向行波

图 10.2: 均匀传输线上的行波

波的反射与匹配

对终端而言有

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-}{\dot{I}_2^+ - \dot{I}_2^-} = \frac{Z_c \dot{I}_2^+ + Z_c \dot{I}_2^-}{\dot{I}_2^+ - \dot{I}_2^-} = Z_L$$

设 $\frac{\dot{I}_2^-}{\dot{I}_2^+} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = N_2$, 称为终端反射系数。

若 $Z_L = Z_c$, 则不存在反向行波, 称负载与传输线匹配, 因此可以认为反向行波是与线路阻抗不匹配的负载引起的。

线路在无反射条件工作时, 终端负载吸收的功率为 $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_c$, 称为自然功率, 此时传输效率最高位

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}$$

10.2 无损耗线

沿线分布电阻和线间分布电导均为 0，线路没有损耗的均匀传输线称作无损耗线，简称无损线。在高频正弦交流作用下的均匀线，由于 $\omega L_0 \gg R_0, \omega C_0 \gg G_0$ ，近似认为是无损线。

传播常数 $\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda}$ ，波阻抗 $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

10.2.1 稳态方程和阻抗变换

已知始端 $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ 时有

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - j\dot{I}_1 Z_c \sin \beta x \\ \dot{I}(x) = -j\frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \beta x + \dot{I}_1 \cos \beta x \end{cases}$$

已知终端 $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ 时有

$$\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' + j\dot{I}_2 Z_c \sin \beta x' \\ \dot{I}(x') = j\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x' + \dot{I}_2 \cos \beta x' \end{cases}$$

若终端负载为 Z_L ，则从距终端 x' 处向终端视入的输入阻抗

$$Z_i(x') = Z_c \frac{Z_L \cos \beta x' + jZ_c \sin \beta x'}{jZ_L \sin \beta x' + Z_c \cos \beta x'}$$

令 $x' = \frac{\lambda}{4}$ ，则 $\beta x' = \frac{\pi}{2}$ ， $Z_i = \frac{Z_c^2}{Z_L}$ ，利用四分之一波长无损线可实现阻抗变换。

10.2.2 三种不匹配阻抗的工作状态

终端开路， $|Z_L| \rightarrow \infty, \dot{I}_2 = 0$

此时 x' 点电压电流相量为 $\begin{cases} \dot{U}(x') = \dot{U}_2 \cos \beta x' \\ \dot{I}(x') = j\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x' \end{cases}$ ，有效值为 $\begin{cases} U(x') = U_2 |\cos \beta x'| \\ I(x') = \frac{U_2}{Z_c} |\sin \beta x'| \end{cases}$

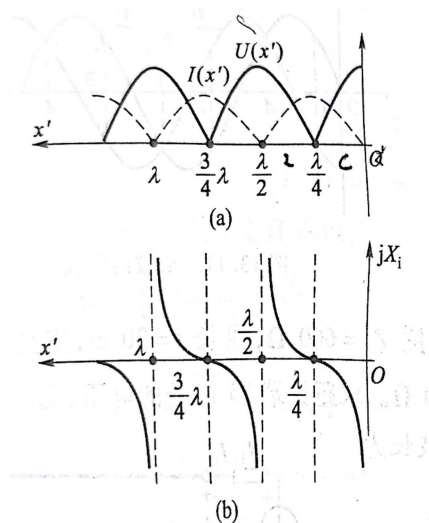


图 10.3: 无损线工作在终端开路状态

沿线 $x' = k\frac{\lambda}{2}$ 处，电压有效值最大，是电压的波腹，电流有效值为 0，是电流的波节；而沿线 $x' = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ 处，是电压的波节，电流的波腹。两个相邻的波节或波腹距离为 $\frac{\lambda}{2}$ 。电压波和电流波都是驻波。

沿线向终端视入的等效阻抗 $Z_i(x') = -jZ_c \cot \beta x' = jX_i$ 。等效阻抗为纯电抗，因此通过任一处的平均功率为零，表明能量不能由波节通过线路向另一段传播，即驻波不传播功率。在电压波节和电流波节 $\frac{\lambda}{4}$ 范围内，有电场和磁场能量的振荡转化。

终端短路, $|Z_L| = 0, \dot{U}_2 = 0$

此时 x' 点的电压电流相量为 $\begin{cases} \dot{U}(x') = jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta x' \\ \dot{I}(x') = \dot{I}_2 \cos \beta x' \end{cases}$ ，有效值为 $\begin{cases} U(x') = Z_c I_2 |\sin \beta x'| \\ I(x') = I_2 |\cos \beta x'| \end{cases}$

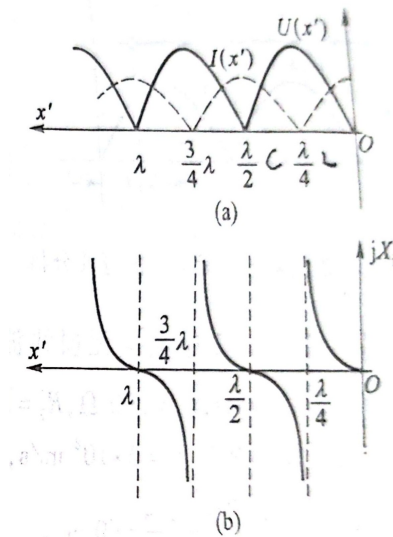


图 10.4: 无损线工作在终端短路状态

沿线向终端视入的等效阻抗 $Z_i(x') = jZ_c \tan \beta x' = jX_i$ ，等效阻抗同样为纯电抗，驻波不传播能量，发生电场和磁场能量的转化。

可将终端短路用 $\frac{\lambda}{4}$ 的终端开路线等效，与终端开路的情况相差 $\frac{\lambda}{4}$ 。

终端接纯电抗负载, $Z_L = jX, \dot{U}_2 = jX \dot{I}_2$

终端反射系数为

$$N_2 = \frac{jX - Z_c}{jX + Z_c}$$

由于无损线波阻抗 $Z_c \in \mathbb{R}$ ，则 $|N_2| = 1$ ，可由 $Z_i(x') = jZ_c \tan \beta x'$ 将纯感抗负载用一段小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的短路线等效。

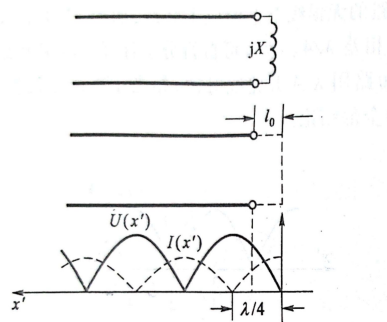


图 10.5: 无损线工作在终端接纯电抗负载状态

10.3 均匀传输线的集中参数等效电路

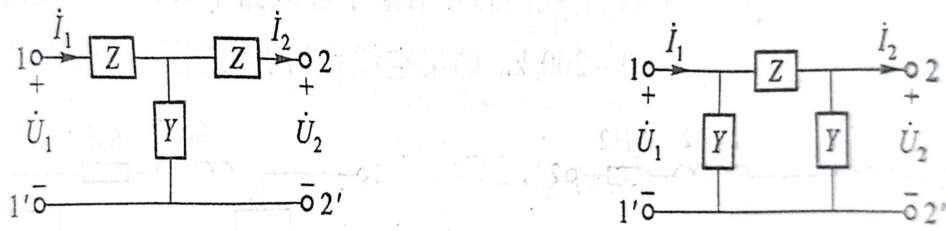


图 10.6: 均匀传输线的等效电路

T 型等效参数:

$$Z = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} Z_c \quad Y = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma l$$

Π 型等效参数:

$$Z = Z_c \sinh \gamma l \quad Y = \frac{\cosh \gamma l - 1}{Z_c \sinh \gamma l}$$

对于中距离输电线, 线路相对波长较短, $|\gamma l| \ll 1$, 利用双曲函数 Taylor 级数并取第一项得近似等效模型。

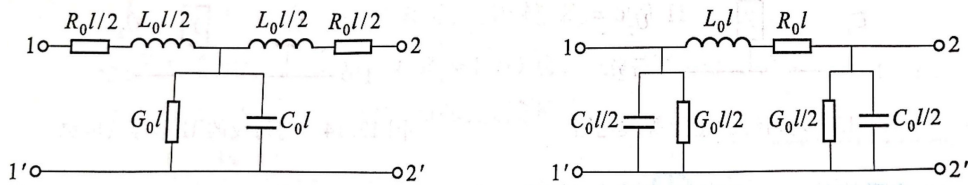


图 10.7: 均匀传输线的近似等效电路

T 型等效参数:

$$Z = \frac{1}{2} \gamma l Z_c \quad Y = \frac{\gamma l}{Z_c}$$

Π 型等效参数:

$$Z = \gamma l Z_c \quad Y = \frac{1}{2} \frac{\gamma l}{Z_c}$$

10.4 无损线零状态响应的暂态分析

10.4.1 零状态响应的通解

对时间 t 取 Laplace 变换, 得 $\mathcal{L}\{u(x, t)\} = U(x, s)$, $\mathcal{L}\{i(x, t)\} = I(x, s)$

则电报方程变形得:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}(x, s)}{dx^2} = s^2 L_0 C_0 \dot{U}(x, s) \\ \frac{d^2 \dot{I}(x, s)}{dx^2} = s^2 L_0 C_0 \dot{I}(x, s) \end{cases}$$

波阻抗和传播常数为 $Z_c(s) = \sqrt{\frac{sL_0}{sC_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, $\gamma(s) = \sqrt{s^2 L_0 C_0} = s \sqrt{L_0 C_0} = \frac{s}{v}$, $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$

复频域通解为

$$\begin{cases} U(x, s) = U'(s) e^{-s \frac{x}{v}} + U''(s) e^{s \frac{x}{v}} \\ I(x, s) = \frac{U'(s)}{Z_c} e^{-s \frac{x}{v}} - \frac{U''(s)}{Z_c} e^{s \frac{x}{v}} \end{cases}$$

象函数 Laplace 逆变换得时域通解为

$$\begin{cases} u(x, t) = u'(t - \frac{x}{v})\varepsilon(t - \frac{x}{v}) + u''(t + \frac{x}{v})\varepsilon(t + \frac{x}{v}) \\ i(x, t) = \frac{1}{Z_c}u'(t - \frac{x}{v})\varepsilon(t - \frac{x}{v}) - \frac{1}{Z_c}u''(t + \frac{x}{v})\varepsilon(t + \frac{x}{v}) \end{cases}$$

通解同样可以分为正向行波和反向行波，波速 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ ，正（反）向行波电压与电流之比为波阻抗。

10.4.2 波的发出

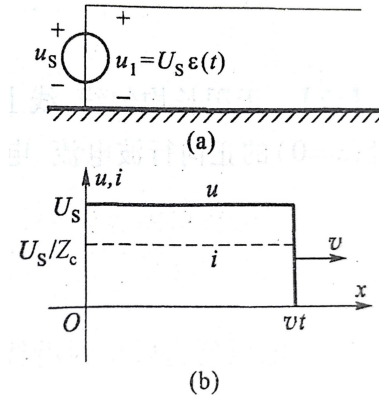


图 10.8: 无损线上波的发出

若始端接阶跃电压源，则开始时线路上只有正向行波， $U(x, s) = U'(s)e^{-s\frac{x}{v}}$

由边界条件得 $U'(s) = U'(s)e^{-s\frac{x}{v}}|_{x=0} = \frac{U_S}{s}$

取 Laplace 逆变换得沿线分布函数 $u(x, t) = U_S\varepsilon(t - \frac{x}{v})$, $i(x, t) = \frac{U_S}{Z_c}\varepsilon(t - \frac{x}{v})$

也就是说，波从电源发出之际，无损线对电源来说相当于一个阻值为 Z_c 的纯电阻负载。电源发出的电压矩形波和电流矩形波把线路充电，此时电源的能量一半用来建立电场，一半用来建立磁场。

10.4.3 波的反射

始端接通激励源后，电压正向行波和电流正向行波向终端推进。当传播到电路不均匀处时，例如负载端、两不同线路接头处、线路的分支处、接有集中参数处等，会产生波的反射。

负载运算阻抗为 $Z_L(s)$ ，则负载的终端反射系数

$$N_2(s) = \frac{Z_L(s) - Z_c}{Z_L(s) + Z_c}$$

终端开路时

$Z_L(s) \rightarrow \infty$ ，此时 $N_2(s) = 1$ ，发生全反射，在反射处反射波等于入射波，则有

$$U''(s)e^{s\frac{l}{v}} = U'(s)e^{-s\frac{l}{v}} \quad \text{即} \quad U''(s) = U'(s)e^{-s\frac{2l}{v}}$$

若仍为阶跃电压源 $U'(s) = U_S/s$ ，则反射波

$$U^-(x, s) = U''(s)e^{s\frac{x}{v}} = \frac{U_S}{s}e^{s\frac{x-2l}{v}}$$

得原函数 $u^-(x, t) = U_S \varepsilon(t + \frac{x-2l}{v})$ 。可以看出, 在终端处, $t > \frac{l}{v}$ 后才有反射波, 这时正向行波到达终端发生反射。入射波和反射波叠加得线间电压为

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) = U_S \varepsilon(t - \frac{x}{v}) + U_S \varepsilon(t + \frac{x-2l}{v})$$

线间电流为

$$i(x, t) = i^+(x, t) - i^-(x, t) = \frac{U_S}{Z_c} \varepsilon(t - \frac{x}{v}) - \frac{U_S}{Z_c} \varepsilon(t + \frac{x-2l}{v})$$

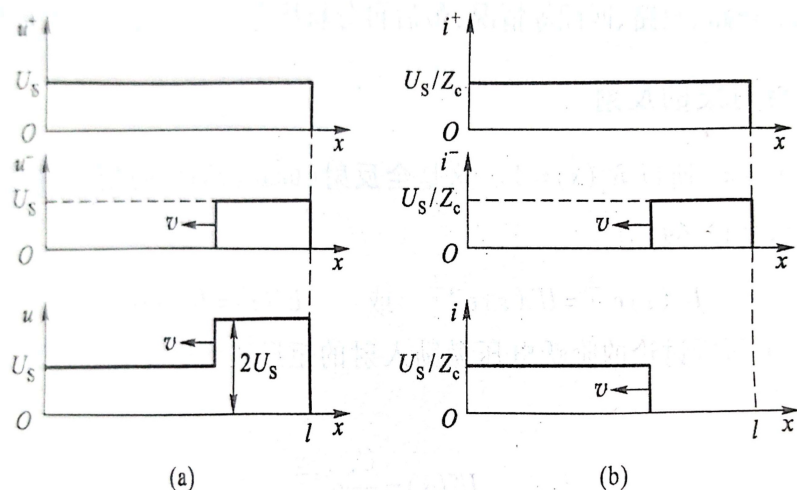


图 10.9: 无损线终端开路时波的反射

反射波所到之处, 电压升高一倍。

终端短路时

$N_2(s) = -1$, 发生负全反射, 反射波与开路时相比相差一负号。

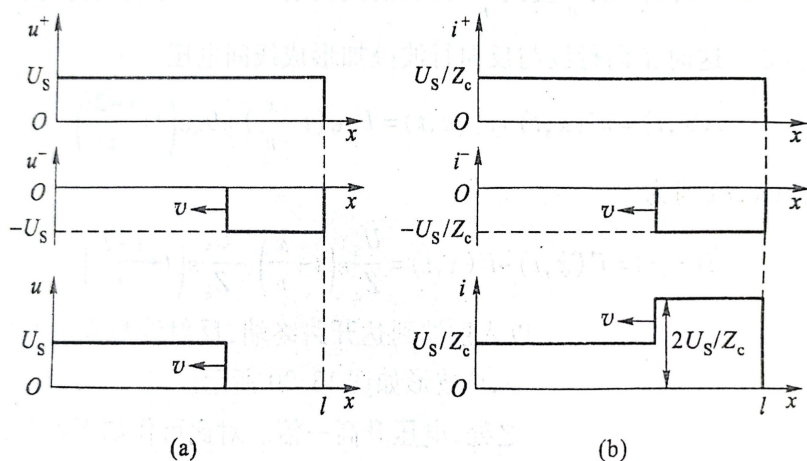


图 10.10: 无损线终端短路时波的反射

反射波所到之处, 电流升高一倍。

终端匹配时

终端匹配 $Z_L = Z_c$, 则 $N_2(s) = 0$, 处无反射的工作状态, 此时 $u(x, t) = u^+(x, t)$, 没有反射波, 相当于无限长的均匀线, 当 $t > l/v$ 后, 沿线电压建立起达到稳态。

波的多次反射

始端反射系数

$$N_1 = \frac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c}$$

只要始端和终端都不匹配，反射过程会不停地进行下去，这就是波的多次反射。

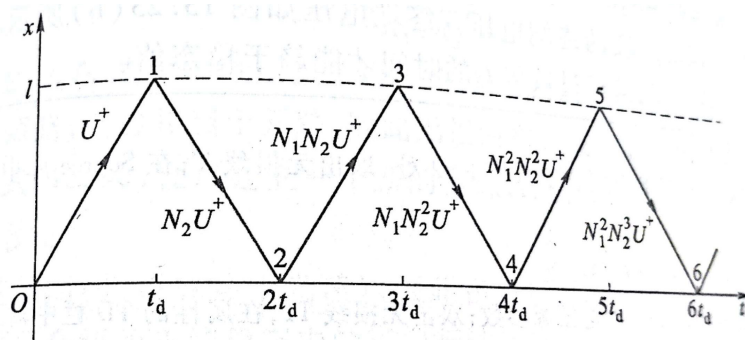


图 10.11: 波的多次反射

终端接一般负载时的反射计算

$$\begin{cases} u_2 = u_2^+ + u_2^- \\ i_2 = i_2^+ - i_2^- = \frac{u_2^+}{Z_c} - \frac{u_2^-}{Z_c} \end{cases}$$

解得 $u_2 = 2u_2^+ - Z_c i_2$ ，由此可得无损线终端的集中参数等效电路如下图，这就是彼德生（Peterson）法则。

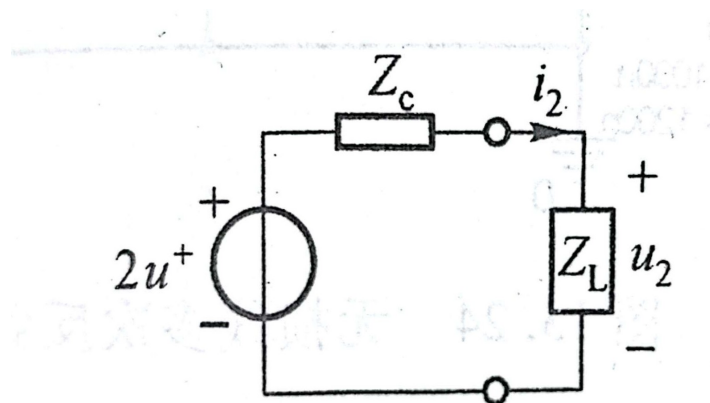


图 10.12: 终端的集中参数等效电路