

信号分析与处理

W • D • Gaster

2025 年 6 月

目录

1	连续信号的分析	1
1.1	时域分析	1
1.1.1	时域描述	1
1.1.2	时域运算	2
1.1.3	时域分解	2
1.2	频域分析	3
1.2.1	周期信号的傅里叶级数 (CFS)	3
1.2.2	非周期信号的傅里叶变换 (CTFT)	4
1.2.3	傅里叶变换的性质	5
1.3	复频域分析	6
2	离散信号的分析	7
2.1	信号的采样和恢复	7
2.2	时域分析	7
2.2.1	时域描述	7
2.2.2	时域运算	8
2.3	频域分析	8
2.3.1	周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)	8
2.3.2	非周期序列的离散时间傅里叶变换 (DTFT)	9
2.3.3	四种傅里叶分析和信号的关系	9
2.3.4	离散傅里叶变换 (DFT)	10
2.3.5	快速傅里叶变换 (FFT)	11
2.4	z 域分析	12
3	信号处理基础	13
3.1	系统及其性质	13
3.1.1	系统的描述	13
3.1.2	系统的性质	13
3.2	线性系统处理	13
3.2.1	时域法分析	13
3.2.2	频域法分析	13
3.2.3	复频域法分析	14
4	滤波器	14
4.1	模拟滤波器	14
4.1.1	巴特沃思 (Butterworth) 低通滤波器	14
4.1.2	切比雪夫 (Chebyshev) 低通滤波器	15
4.1.3	模拟滤波器的频率变换	16
4.2	数字滤波器	16
4.2.1	无限冲激响应滤波器 (IIR)	16
4.2.2	有限冲激响应滤波器 (FIR)	17

信号的分类

按独立变量个数：n 维信号

按时间特性：确定性信号 or 随机信号

按时间函数特性：

幅度 \ 频率	Continuous-time(连续)	Discrete-time(离散)
Continuous-amplitude(连续)	Analog(模拟)	Sampling(采样)
Discrete-amplitude(离散)	Quantization(量化)	Digital(数字)

按重复性：周期信号 or 非周期信号

判断以 T_1, T_2 为周期三角函数的线性组合是否是周期信号： T_1/T_2 是否为有理数，若是，则 $T = lcd(T_1, T_2)$

按能量特点：能量信号 or 功率信号 or 非能量、非功率信号

信号的能量 $E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$ ，信号的功率 $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$

$E < \infty$ 则为能量信号，此时 $P = 0$ ； $0 < P < \infty$ 则为功率信号，此时 $E = \infty$

1 连续信号的分析

1.1 时域分析

1.1.1 时域描述

普通信号

正弦信号： $f(t) = K \sin(\omega t + \theta), t \in \mathbb{R}$

(1) 同频率正弦信号的叠加，结果仍然是原频率的正弦信号；(2) 若一个正弦信号的频率 f_1 是另一个正弦信号频率 f_0 的整数倍，则合成信号是频率为 f_0 的非正弦周期信号；(3) 正弦信号的微分和积分仍然是同频率的正弦信号

指数信号： $f(t) = Ke^{at}, t \in \mathbb{R}$

复指数信号： $f(t) = Ke^{st} = Ke^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t), s = \sigma + j\omega$

	$\sigma = 0$	$\sigma \neq 0$
$\omega = 0$	直流信号	实指数信号
$\omega \neq 0$	正弦信号	指数包络的正弦振荡

奇异信号

单位斜坡信号： $r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

截平的斜变信号： $f_1(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} r(t) & t < \tau \\ K & t \geq \tau \end{cases}$

三角形脉冲： $f_2(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} r(t) & t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$

单位阶跃信号： $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, u(0) \text{ 无定义}$

矩形脉冲 $G_T(t) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$

单位冲激信号: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$

性质: (1) 筛选特性: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$; (2) 偶函数特性: $\delta(t) = \delta(-t)$;

单位冲激偶信号: $\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

性质: (1) 筛选特性: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$; (3) 奇函数特性: $\delta'(t) = -\delta'(-t)$

1.1.2 时域运算

(1) 基本运算:

幅度尺寸变换: $f_2(t) = af_1(t)$, 不改变信号的基本特征;

时间尺寸变换: $f_2(t) = f_1(at)$, 改变信号频率, 频谱发生变化;

翻转: $f(t) \rightarrow f(-t)$, 沿 y 轴镜像对称

平移: $f(t) \rightarrow f(t-t_0)$, 滞后, 波形右移; $f(t) \rightarrow f(t+t_0)$, 超前, 波形左移

(2) 叠加和相乘

(3) 微分和积分: 微分突出变化部分, 积分平滑突变部分;

(4) 卷积: $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

卷积的性质

(1) 交换律: $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

(2) 分配律: $x(t) * [x_1(t) + x_2(t)] = x(t) * x_1(t) + x(t) * x_2(t)$

(3) 结合律: $[x(t) * x_1(t)] * x_2(t) = x(t) * [x_1(t) * x_2(t)]$

(4) 微分: $\frac{d}{dt}[x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) * x_2(t)$

(5) 积分: $\int_{-\infty}^t [x_1(\tau) * x_2(\tau)]d\tau = x_1(t) * [\int_{-\infty}^t x_2(\tau)d\tau] = [\int_{-\infty}^t x_1(\tau)d\tau] * x_2(t)$

(6) 与奇异函数的卷积: $x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$, $x(t) * \delta'(t) = x'(t)$, $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

1.1.3 时域分解

按交直流分解: $f(t) = f_D + f_A(t)$, 其中 f_D 为直流分量, $f_A(t)$ 为交流分量

按奇偶性分解: $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$, 其中 $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$ 为偶分量, $f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$ 为奇分量

按冲激函数分解: $f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)[u(t-k\Delta t) - u(t-(k+1)\Delta t)] \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) * \delta(t)$

正交分解:

若 $\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt = 0$, 则称 $f_1(t), f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上正交。

若 n 个非零函数构成的函数集 $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 上满足:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)f_j^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为区间 (t_1, t_2) 内的正交函数集。

若不存在非零函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)\varphi^*(t)dt = 0$, 则称此函数集构成完备正交函数集。

三角函数集 $\{\cos n\omega_0 t\}$ 和复指数函数集 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上构成完备正交函数集。

其他完备正交函数集：勒让德（Legendre）函数集，切比雪夫（Chebyshev）多项式集，沃尔什（Walsh）函数集……

对一个信号， $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) + x_e(t), t \in (t_1, t_2)$

选取系数 $c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [f_i(t)]^2 dt}$ ，使得均方误差 $\overline{x_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t)]^2 dt$ 最小

帕斯瓦尔（Parseval）方程： $\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 k_i$ ，即信号的能量等于完备正交函数集中各分量的能量之和。

1.2 频域分析

1.2.1 周期信号的傅里叶级数（CFS）

狄利克雷（Dirichlet）条件 在一个周期内，间断点数目是有限个，极值点数目是有限个且信号绝对可积。

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j\omega_1 t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

其中，直流分量 $a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$,

正余弦分量幅度分别为 $a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt, b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$

三角形形式 $c_0 = a_0, c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

指数形式 $F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, F_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

周期信号的频谱

周期信号由直流分量和一系列频率为原信号频率整数倍的正弦信号分量组成，依次为 n 次谐波分量，其中一次谐波分量也叫基波分量。

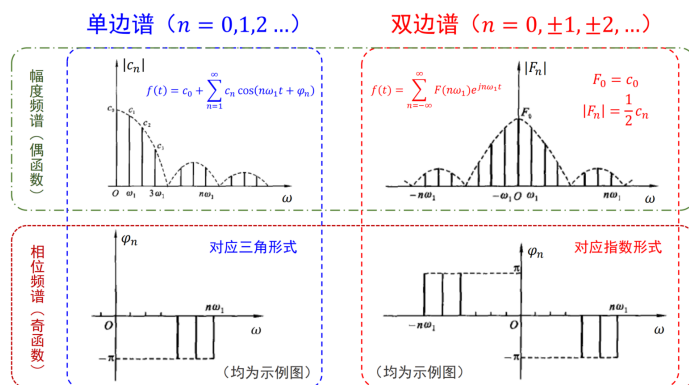


图 1: 周期信号频谱

对于有对称性的函数而言，利用对称性可以简化傅里叶系数的计算。

函数 $f(t)$	波形举例	直流分量 a_0, F_0	余弦分量 $a_n (n \neq 0)$	正弦分量 b_n	复指数分量 F_n
偶函数 $f(t) = f(-t)$		$\frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) dt$	$\frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$)	0	$\frac{a_n}{2}$ (实数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇函数 $f(t) = -f(-t)$		0	0	$\frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$)	$-j \frac{b_n}{2}$ (虚数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇谐函数 $f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$		0	$\frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 3, \dots$)	$\frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ ($n = 1, 3, \dots$)	$\frac{a_n - jb_n}{2}$ (复数) ($n = 1, 3, \dots$)

图 2: 函数对称性与傅里叶系数的关系

非正弦周期信号的傅里叶近似

以方波信号为例, $f(t) = \begin{cases} -\frac{E}{2} & -\frac{T_1}{2} \leq t < 0 \\ \frac{E}{2} & 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \end{cases}$

傅里叶展开 $f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_1 t]$, 取前 N 项做近似, $f_N(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\omega_1 t]$

误差 $E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varepsilon_N^2(t) dt$, $E_1 \approx 0.05E^2$, $E_3 \approx 0.02E^2$, $E_5 \approx 0.015E^2$, 项数越多, 误差越小

吉布斯 (Gibbs) 现象: 傅里叶有限级数项的项数越多, 所合成的波形中出现的峰起越靠近 $f(t)$ 的不连续点, 当 N 很大时, 峰起值趋于总跳变值的 9%。

周期矩形脉冲 $f(t) = E[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] = \frac{E\tau}{T_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2E\tau}{T_1} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$

$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T_1} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2}) e^{jn\omega_1 t}$

频谱特点: (1) 谱线是离散的, 间隔为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$; (2) 直流分量、基波和各次谐波分量大小正比于脉冲幅度 E 和脉宽 τ , 反比于周期 T_1 , 直流量峰值 $\frac{E\tau}{T_1}$; (3) 各谱线幅度按 $Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 的包络线规律变化, 当 $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$ 时, 包络线过零点; (4) 较高幅值的谱线集中在第一个过零点 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 内, 频带宽度 $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

复指数信号 $f(t) = e^{j\omega_1 t}$ 的傅里叶系数 $F_n = Sa((1-n)\pi) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换 (CTFT)

非周期信号可以看成周期 T 无穷大、基波频率 ω_1 无穷小的周期信号。但周期无穷大时, 谱线将无限密集, 幅度将变为无穷小。

构造一个周期信号 $\hat{f}(t)$, 使其为 $f(t)$ 周期延拓的结果。将 $\hat{f}(t)$ 展开有

$$\hat{F}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \hat{f}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

定义 $F(\omega) = T_1 F(n\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 称为频谱密度函数。

因此, $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_1 \hat{F}_n e^{jn\omega_1 t} \frac{1}{T_1}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

傅里叶正变换: $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

傅里叶逆变换: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

狄利克雷 (Dirichlet) 条件: 在无限周期内绝对可积, 在有限区间内不连续点有限且不连续点的函数值有限, 极值点有限。

傅里叶逆变换的三角形式 (对实函数 $f(t)$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

即一个非周期信号包含了频率从零到无限大的一切频率的余弦分量, 各分量振幅 $\frac{1}{\pi} |F(\omega)| d\omega$

表 1: 典型非周期信号的频谱

非周期信号	频谱密度函数	时域表达式
矩形脉冲信号	$F(\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$	$f(t) = E[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})]$
单边指数信号	$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	$f(t) = e^{-at}u(t), a > 0$
双边指数信号	$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t), a > 0$
双边奇指数信号	$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), a > 0$
单位直流信号	$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$	$f(t) = 1$
符号函数信号	$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$	$f(t) = sgn(t) = u(t) - u(-t)$
单位冲激信号	$F(\omega) = 1$	$f(t) = \delta(t)$
单位阶跃信号	$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$f(t) = u(t)$

周期信号的傅里叶变换

- $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
- $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

对于一般周期信号 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$, 傅里叶变换为 $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$

1.2.3 傅里叶变换的性质

- 线性: $\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{F}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[f_2(t)]$
- 奇偶虚实性: $f^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega)$

当 $f(t)$ 是实函数时, 有 $F(\omega) = F^*(-\omega)$, 且 $|F(\omega)|$ 为偶函数, $\varphi(\omega)$ 是奇函数

当 $f(t)$ 是实偶函数时, $F(\omega)$ 是实偶函数; 当 $f(t)$ 是实奇函数时, $F(\omega)$ 是虚奇函数。

- 对偶性: $F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$
- 尺度变换特性: $f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$

- 时移特性: $f(t \pm t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{\pm j\omega t_0} F(\omega)$
- 频移特性: $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega \mp \omega_0)$
- 微分特性: $f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)$
- 积分特性: $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
- 卷积定理: $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)], \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)]$

1.3 复频域分析

拉普拉斯正变换: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

拉普拉斯逆变换: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$

拉普拉斯变换必须满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 (\sigma > \sigma_0)$, 满足此条件的 s 的范围即为拉氏变换的收敛域。

表 2: 已知拉氏变换求傅氏变换

$\sigma_0 > 0$	不存在傅里叶变换
$\sigma_0 < 0$	令 $s = j\omega$
$\sigma_0 = 0$	$\mathcal{F}[f(t)] = F(s) _{s=j\omega} + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n)$

2 离散信号的分析

2.1 信号的采样和恢复

采样脉冲 $p(t)$, 连续信号经过脉冲调制得到采样信号 $f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$, 则 $F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$

矩形脉冲采样: $P_n = \frac{E\tau}{T_s} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})$, $F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2}) F(\omega - n\omega_s)$

理想冲激采样: 周期单位冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$, $f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$ $P_n = \frac{1}{T_s}$, $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$

时域采样定理: 对于频谱受限、频率为 f_m 的信号 $f(t)$, 如果其频谱只占据 $(-\omega_m, +\omega_m)$ 范围, 则信号可以用等间隔的采样值唯一表示, 采样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$, 即最低采样频率为 $\omega_s = 2\omega_m$ 称为奈奎斯特频率。

在频域上采样得到 $F_p(\omega) = F(\omega) \delta_\omega(\omega)$, 则 $f_p(t) = f(t) * \mathcal{L}[\delta_\omega(\omega)] = f(t) * \frac{1}{\omega_0} \delta_T(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0)$

周期信号: 时域上周期重复, 频域上离散; 采样信号: 时域上离散, 频域上周期重复。

频域采样定理: 对于时间受限信号 $f(t)$, 集中在 $(-t_m, +t_m)$ 范围, 若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $F(\omega)$ 进行采样, 则采样后频谱 $F_p(\omega)$ 可以唯一表示原信号。

时域采样信号恢复原信号 (时域上的内插公式): $H(\omega) = T_s (|\omega| \leq \omega_c)$,

$f(t) = f_s(t) * h(t) = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)) * Sa(\frac{\omega_s t}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa(\frac{\omega_s(t - nT_s)}{2})$

频域采样信号恢复原信号 (频域上的内插公式): $g(t) = \omega_0 (|t| \leq \frac{T_0}{2})$,

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F_p(\omega) * G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) Sa(\frac{T_0(\omega - k\omega_0)}{2})$

2.2 时域分析

2.2.1 时域描述

等间隔离散时刻的信号的某一点的函数值可以用数列 $x(n)$ 表示, 以 $\{x(n)\}$ 表示一个离散信号, $W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, 可以用有序数列、闭式表达式或图形表示。

典型离散信号

单位脉冲序列 (单位样值信号): $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$, 脉冲序列具有取样特性, $x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$,

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)$, 可以用单位脉冲序列表示任意序列 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)$

单位阶跃序列: $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $\delta(n) = u(n) - u(n - 1)$, $u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n)\delta(n - k)$

矩形序列: $R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ $R_N(n) = u(n) - u(n - N) = \sum_{k=n}^{n-N+1} \delta(k)$

斜变序列: $R(n) = nu(n)$, $r(n) = n^2u(n)$

实指数序列: $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$ 收敛, $|a| > 1$ 发散; $a > 0$ 数列恒正, $a < 0$ 数列正负交替取值。

正弦型序列: $x(n) = A \sin(n\Omega_0 + \phi)$, $\Omega_0 = \omega_0 T_s$ 为数字角频率。离散正弦序列时移对应相移, 当 $\phi_0 = k\Omega_0$ 时才有相移对应时移。离散正弦序列不一定是周期序列, 只有 $N\Omega_0 = 2k\pi$ 成立才有周期性且周期为 N , 两个相同的离散时间信号的数字角频率不一定相同。

复指数序列: $x(n) = e^{(\sigma + j\Omega_0)n} = e^{\sigma n}(\cos \Omega_0 n + j \sin \Omega_0 n)$

2.2.2 时域运算

平移和翻转: $m > 0$ 时, $x(n-m)$ 逐项延时 (右移) m 位, $x(n+m)$ 逐项超前 (左移) m 位、翻转 $x(-n)$ 以 $n=0$ 为纵轴镜像对称。

和积运算: $z(n) = x(n) + y(n)$ 或 $z(n) = x(n)y(n)$, 逐项对应相加或相乘。

累加: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ 表示之前的所有值之和, 对应时域的积分。

差分: 前向差分 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$, 后向差分 $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$, $\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$, 对应时域的微分。

时间尺度 (比例) 变换: 并非在时间轴上比例变换, 而是改变采样间隔。 $x(mn)$ 每隔 m 点取一点, $x(mn) = x(t)|_{t=mnT_s}$; $x(n/m)$ 每两点间插入 m 个增加的采样点, $x(n/m) = x(t)|_{t=n/mT_s}$ 。

卷积和: $x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$, 长度为 $M+N-1$, 满足交换律、分配律、结合律, $x(n-m) * \delta(n-k) = x(n-m-k)$, 对应时域的卷积积分。

2.3 频域分析

2.3.1 周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)

$$X(k\Omega_0) = X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{NT_s}nT_s} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

将 $x(n)$ 在 $\{e^{jk\Omega_0}\}$ 的正交完备集上分解得 $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

离散傅里叶级数变换对 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} X(k\Omega_0)$,

$$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}, IDFS[X(k\Omega_0)] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

离散傅里叶级数的性质

- 线性: $ax(n) + by(n) \xleftrightarrow{DFS} aX(k\Omega_0) + bY(k\Omega_0)$
- 周期卷积定理: $x(n) \otimes h(n) \xleftrightarrow{DFS} NX(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$, $x(n)h(n) \xleftrightarrow{DFS} X(k\Omega_0) \otimes H(k\Omega_0)$ 其中周期卷积 $x(n) \otimes h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k)$, 即卷积时只在单个周期内求和。
- 复共轭: $x^*(-n) \xleftrightarrow{DFS} X^*(k\Omega_0)$
- 位移性质: $x(n-m) \xleftrightarrow{DFS} e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$
- 帕斯瓦尔定理: $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)H^*(k\Omega_0)$

周期序列的频谱

(1) 离散时间周期信号的频谱是具有谐波性的离散周期序列。

(2) 满足采样定理条件下, $X(k\Omega_0)$ 可以看成 $X(k\omega_0)$ 以 ω_s 为周期的延拓。不满足会出现频谱混叠。

混叠: 频率为 $f_0 \pm mf_s$ 的信号与频率为 f_0 的信号具有相同的频谱, 发生频谱混叠。

泄漏: 由于信号截取长度不当导致信号基本频率改变并出现跳变, 导致谱线分散, 发生频谱泄漏。

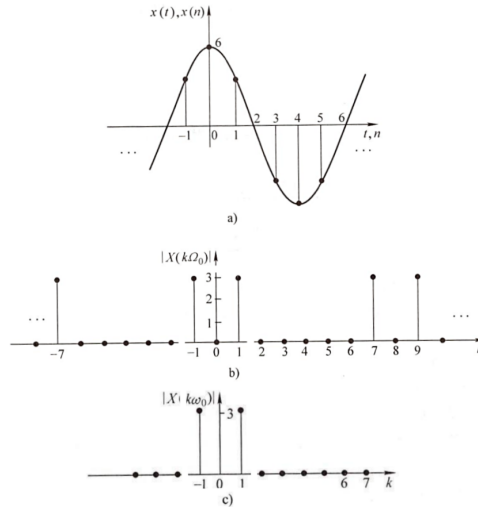


图 3: 周期序列频谱和周期信号频谱的关系

2.3.2 非周期序列的离散时间傅里叶变换 (DTFT)

存在条件: $x(n)$ 绝对可和, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

频谱密度函数 $X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$, 周期为 2π 。

$N \rightarrow \infty, \Omega_0 \rightarrow d\Omega, k\Omega_0 \rightarrow \Omega, X(k\Omega_0) \rightarrow 0$

$$x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X(\Omega)e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

离散时间傅里叶正变换: $DTFT[x(n)] = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$

离散时间傅里叶逆变换: $IDTFT[X(\Omega)] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$

离散时间傅里叶变换的性质

- 线性: $ax(n) + by(n) \xleftrightarrow{DTFT} aX(\Omega) + bY(\Omega)$
- 时域平移: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
- 频域平移: $e^{j\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega - \Omega_0)$
- 时间翻转: $x(-n) \xleftrightarrow{DTFT} X(-\Omega)$
- 共轭对称: $x^*(n) \xleftrightarrow{DTFT} X^*(-\Omega)$
- 时域卷积: $x(n) * y(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)Y(\Omega)$
- 频域卷积: $x(n)y(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\Omega - \lambda)d\lambda$
- 频域微分: $nx(n) \xleftrightarrow{DTFT} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
- 对称性: 实 (虚) 偶函数的 DTFT 也是实 (虚) 偶函数, 实 (虚) 奇函数的 DTFT 是虚 (实) 奇函数。

2.3.3 四种傅里叶分析和信号的关系

- 时域周期性对应频域的离散性, 时域离散性对应频域的周期性。时域周期信号由正弦谐波信号组合而成, 对应频谱离散; 时域离散信号由冲激信号组成, 频率丰富, 但是由于数字角频率的周期性对应频谱周期性。

表 3: 常见离散序列的 DTFT

$\delta(n)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u(-n-1), a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
$\cos \omega_0 n$	$\pi\delta(\Omega + \Omega_0) + \pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

- 时域的非周期性对应频域的连续性，时域的连续性对应频域的非周期性。时域非周期信号不具有谐波性，自然频谱连续；时域连续信号的数字角频率无重复，对应频谱非周期。

表 4: 不同时域信号及其频谱

连续周期	非周期离散的频谱函数	连续傅里叶级数 CFS
连续非周期	非周期连续的频谱密度函数	连续傅里叶变换 CTFT
离散周期	周期离散的频谱函数	离散傅里叶级数 DFS
离散非周期	周期连续的频谱密度函数	离散傅里叶变换 DTFT

2.3.4 离散傅里叶变换 (DFT)

为了利用计算机对信号进行分析，需要信号的时域和频域都是离散序列，对于离散非周期信号，频谱密度函数是连续的，利用 DFS 的时域频域离散性，对非周期信号进行周期延拓实现频域离散化。

对有限长序列 $x(n)(0 \leq n \leq N-1)$ ，按周期 N 进行延拓，得到 $x_p(n) = \sum_r x(n+rN)$ ，称 $x(n)$ 为主值序列。

对延拓后的周期序列进行 DFS 得 $X_p(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ ，反变换得 $x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

取 $x_p(n)$ 和 $X_p(k\Omega_0)$ 的主值区间，则有 $X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ ， $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

由于傅里叶变换得到的是频谱密度函数，定义有限长序列的离散傅里叶变换为 $X(k) = NX(k\Omega_0)$ 。

也可以从 DTFT 的频谱密度函数取样得到离散傅里叶变换 $X(k) = X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}$

离散傅里叶正变换： $X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

离散傅里叶反变换： $x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

离散傅里叶变换的性质

- 线性： $ax(n) + by(n) \xrightarrow{DFT} aX(k) + bY(k)$ ，两个序列要有相同的长度，若长度不同则长度短序列要补零。
- 圆周移位： $x((n-m))_N R_N(n) \xrightarrow{DFT} e^{-jk\Omega_0 m} X(k)$ ， $e^{jk_0\Omega_0 n} x(n) \xrightarrow{DFT} X((k-k_0))_N R_N(k)$ 。由于进行周期延拓，DFT 移位具有循环特性，把 $x(n)$ 排列在 N 等分的圆周上，则移位可以表示圆周上旋转， $((n-m))_N$ 表示对 N 取余， $R_N(n)$ 是矩形序列表示取主值范围。
- 圆周卷积： $x(n) \otimes y(n) \xrightarrow{DFT} X(k)Y(k)$ ， $x(n)y(n) \xrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$ 。圆周卷积 $x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N R_N(n)$ ，圆周卷积的两序列长度相同，卷积后长度和原序列相同。

- 对称性：实（虚）函数的 DFT 实部为偶（奇）、虚部为奇（偶）。实（虚）偶函数的 DFT 也是实（虚）偶函数，实（虚）奇函数的 DFT 是虚（实）奇函数。

矩阵形式的离散傅里叶变换

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{1 \times 1} & W_N^{2 \times 1} & \cdots & W_N^{(N-1) \times 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{1 \times (N-1)} & W_N^{2 \times (N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

即 $\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}_N^{nk} \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{x}(n) = \mathbf{W}_N^{-nk} \mathbf{X}(k)$

对于旋转因子 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$: $W_N^0 = 1, W_N^N = 1, W_N^{\frac{N}{2}} = -1, W_N^{\frac{N}{4}} = -j$

- 正交性: $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} (W_N^{mk})^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1 & n-m = lN \\ 0 & n-m \neq lN \end{cases}$
- 周期性: $W_N^{k+lN} = W_N^k, W_N^{(n+mN)(k+lN)} = W_N^{nk}$
- 对称性: $W_N^{nk+\frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$
- 可约性: $W_N^{rn} = W_{N/r}^n, W_{rN}^{rn} = W_N^n$

2.3.5 快速傅里叶变换 (FFT)

对于 N 点 DFT, 每一个 $X(k)$ 需要进行 N 次乘法和 $N-1$ 次加法, 因此完成全部 DFT 运算需要 N^2 次乘法和 $N(N-1)$ 次加法, 时间复杂度 $O(N^2)$ 。

FFT 基本思想: 将原始的 N 点序列, 分解成一系列短序列, 充分利用 W_N^{nk} 的性质, 求出短序列相应的 DFT, 在适当组合得到原序列的 DFT。

按时间抽取 (DIT) 的基 2FFT 算法 (Cooley-Tukey 算法)

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l) (W_N^2)^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1) (W_N^2)^{lk} = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l) W_{N/2}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1) W_{N/2}^{lk} = G(k) + W_N^k H(k)$$

对 $X(k)$ 前 $\frac{N}{2}$ 个点, $X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$, 对后 $\frac{N}{2}$ 个点, $X(k+\frac{N}{2}) = G(k+\frac{N}{2}) + W_N^{k+N/2} H(k+\frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k H(k)$, 此即为第一次抽取。

若 $\frac{N}{2}$ 是偶数, 继续进行抽取直到 $\frac{N}{2^i}$ 为奇数 (即第 i 次) 停止, 每一次抽取都进行蝶形运算, 将宽度降为原来的一半, 最后成为 2 点 DFT 运算。

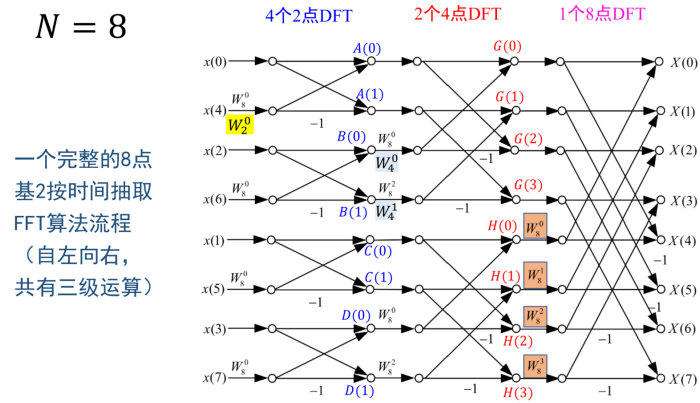
每个蝶形运算进行一次乘法和两次加法, 因此每一级进行 $N/2$ 次乘法和 N 次加法, 因此总共有 $\frac{1}{2} N \log_2 N$ 次乘法和 $N \log_2 N$ 次加法, 时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。

Cooley-Tukey 算法的基本流程:

- (1) 把运算过程分解为 ν 级 ($N = 2^\nu$)。
- (2) 把输入序列 $x(n)$ 进行码位倒置, 按反序排列。
- (3) 每级运算包含 $N/2$ 个蝶形运算单元, 第 i 级的蝶形运算单元组成 $N/2^i$ 个群。
- (4) 每个蝶形运算单元完成 1 次与 W_N^r 的乘法和 2 次加法。
- (5) 同级各群的指数因子分布规律相同, 各级每群的指数因子分别为:

$$W_N^0; W_N^0, W_N^{N/4}; \cdots; W_N^0, W_N^{N/2^i}, W_N^{2N/2^i}, \cdots, W_N^{(2^{i-1}-1)N/2^i}。$$

若将 $X(k)$ 按 k 的奇偶分组进行抽取, 则称为按频率抽取 (DIF) 的基 2FFT 算法 (Sande-Tukey 算法)。

图 4: $N=8$ 时的基 2FFT 算法

2.4 z 域分析

Z 正变换: $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

Z 反变换: $x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$

正变换级数收敛范围为 Z 变换的收敛域，收敛域是以离原点最近的极点为界的圆。

单边 Z 变换: $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ ，一般不特别强调收敛域。

Z 变换与其他变换的关系:

- $\mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{L}[x_s(t)]|_{z=e^{sT}}$ ，s 平面的虚轴映射为 z 平面单位圆，s 左半平面映射为 z 单位圆内部。
- $DTFT[x(n)] = \mathcal{Z}[x(n)]|_{z=e^{j\Omega}}$ ，Z 变换是 $x(n)r^{-n}$ 的 DTFT，单位圆上的 Z 变换就是 DTFT。
- $DFT[x(n)] = \mathcal{Z}[x(n)]|_{z=e^{jk\frac{2\pi}{N}}}$ ，DFT 是 Z 变换在单位圆上的 N 点采样。

3 信号处理基础

3.1 系统及其性质

3.1.1 系统的描述

系统：若干相互作用和相互依赖的事物组合而成具有特定功能的整体。在接受一定的输入信号（激励）的情况下，能产生一定的输出信号（响应）。

数学模型是系统物理特性的数学抽象，同一物理系统在不同条件下，可以得到不同形式的数学模型；不同物理系统可能得到相同的数学模型。

系统的研究方法分为系统分析和系统综合两种方法。

3.1.2 系统的性质

- 记忆性：输出仅取决于同时刻的输入，与过去的工作状态无关。
- 因果性：输出仅取决于现时刻及其之前的输入值，与将来时刻的输入无关。
- 可逆性：输入和输出是一一对应的。
- 稳定性：（BIBO 稳定性）有界输入的零状态响应也是有界的。
- 时不变性：输入信号的时移仅带来输出信号的时移，即系统的参数不随时间变化。
- 线性：满足齐次性和叠加性，若 $\Delta y(t) = A\Delta x(t)$ ，则为增量线性系统。

3.2 线性系统处理

3.2.1 时域法分析

连续系统微分方程： $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$ 。

离散系统差分方程： $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$ 。

连续系统，单位脉冲信号 $\delta(t)$ 对应的零状态响应称作单位冲激响应 $h(t)$ 。

若 $n > m$ ，则 $h(t) = \sum_{i=0}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$ ；若 $n \leq m$ ，则 $h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} C_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=0}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$ 。

离散系统，单位脉冲序列 $\delta(n)$ 对应的零状态响应称作单位脉冲响应 $h(n)$ 。

若 $N > M$ ，则 $h(n) = \sum_{i=0}^N A_i \lambda_i^n u(n)$ ；若 $N \leq M$ ，则 $h(n) = \sum_{j=0}^{M-N} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=0}^N A_i \lambda_i^n u(n)$ 。

对于线性时不变系统，连续系统有 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，离散系统有 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

3.2.2 频域法分析

连续系统对复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的响应 $y(t) = x(t) * h(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$ ，进行连续傅里叶变换（CTFT）后， $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ ，其中 $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ ，称为频率响应。

离散系统对复指数序列 $x(n) = e^{j\Omega n}$ 的响应 $y(n) = x(n) * h(n) = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega k}$ ，进行离散时间傅里叶变换（DTFT）后， $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$ ，其中 $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$ ，称为频率响应。

无失真传输

信号无失真传输要求信号通过系统后在时域上保持原来随时间变化的规律，即信号波形不变，只能是在幅度上按比例放大或缩小，或者在时间上有固定的延迟。

无失真传输时，输出为 $y(t) = Kx(t - t_0)$, $Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}X(\omega)$,

因此幅频特性 $|H(\omega)| = K$, 相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ 。

理想低通滤波器 $H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

冲激响应 $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t - t_0))$, 阶跃响应 $c(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}Si(\omega_c(t - t_0))$

3.2.3 复频域法分析

对连续系统进行拉普拉斯变换得到复频域方程，系统函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, 令 $s = j\omega$ 可求得 $H(\omega)$ 。

对离散系统进行 Z 变换得到复频域方程，系统函数 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, 令 $z = e^{j\Omega}$ 可求得 $H(\Omega)$ 。

4 滤波器

滤波：根据有用信号与噪声信号的不同特性，实现二者有效分离，从而提取有用信号，消除或减弱噪声。
技术指标：

- 中心频率：通带和阻带截止频率的几何平均值， $\omega_o = \sqrt{\omega_p \omega_s}$ 。
- 通带波动：通带内频率特性曲线最大峰值和最小谷值之差。
- 相移：某一特定频率信号通过滤波器时输入端和输出端的相位差。
- 群延迟：相频特性斜率的负值， $\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ 。
- 衰减函数： $\alpha = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20 \lg |H(\omega)|$ ，取幅值下降 3dB 所对应的频率值作为 ω_p ，此时通带衰减函数 $\alpha_p = -20 \lg |H(\omega_p)|$ 。同样定义阻带衰减函数 $\alpha_s = -20 \lg |H(\omega_s)|$ 。

4.1 模拟滤波器

设计方法：根据幅度平方函数 $|H(\omega)|^2$ 求系统函数 $H(s)$ ，有若干种类型（Butterworth 型、Chebyshev 型、Cauer 型、Bessel 型）供选择。再由选定的 $H(s)$ 实现二端口网络的电路结构与参数。

基本要求：(1) 稳定的线性定常系统；(2) 实系数的有理函数且极点在左半平面；(3) 分子多项式阶数不大于分母多项式阶数；(4) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ 是实函数。

$|H(j\omega)|^2|_{j\omega=s} = H(j\omega)H^*(j\omega)|_{j\omega=s} = H(j\omega)H(-j\omega)|_{j\omega=s} = H(s)H(-s)$ ，即 $H(s)$ 的零极点是关于虚轴对称的。由于分子分母是实系数多项式，故零极点也关于实轴对称。

因此确定零极点的方法：将幅度平方函数中的 $j\omega$ 换成 s ，求出零极点；左半平面的极点是 $H(s)$ 的，若求最小相位系统，则所有零点必须在左半平面或虚轴上，虚轴上零点平分。

4.1.1 巴特沃思（Butterworth）低通滤波器

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}, \text{ 其中 } \omega_c \text{ 为通带截止频率，对应衰减为 3dB。}$$

幅频特性

- 最大平坦性：n 阶 Butterworth 滤波器在 $\omega = 0$ 处前 $2n - 1$ 阶导数均为 0。
- 频响曲线单调下降。
- 随 n 增大，通带幅频特性变平坦，阻带幅频特性衰减加快。
- 通带内频响无起伏。

$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + (-1)^n (\frac{s}{\omega_c})^{2n}}$ ，所有极点 $s_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2n}\pi)}$ ，所有极点均匀分布在 ω_c 为半径的圆上，虚轴上无极点。若 n 为奇数，有两个实极点 $s = \pm\omega_c$ ，若 n 为偶数则无实极点。

为使系统稳定，取左半平面极点， $H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}$ 。为了通用性，将频率归一化处理，上下同除 ω_c^n ，

$$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}, \bar{s}_k = \frac{s_k}{\omega_c}。 \text{ 则 } H(\bar{s}) = \frac{1}{\prod_{k=0}^n [\bar{s} - e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2n}\pi)}]} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n/2} [\bar{s} - e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2n}\pi)}][\bar{s} - e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2(n-k+1)-1}{2n}\pi)}]}$$

$$\text{若 } n \text{ 为偶数, } H(\bar{s}) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n/2} [\bar{s}^2 - 2 \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2})\bar{s} + 1]}$$

$$\text{若 } n \text{ 为奇数, 则 } H(\bar{s}) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{(n-1)/2} [\bar{s}^2 - 2 \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2})\bar{s} + 1][\bar{s} + 1]}$$

阶数的确定: $\alpha = 10 \lg[1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}]$, 根据题目要求的阻带衰减函数或通带衰减函数确定,

$$\text{即 } n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}}{\lg(\frac{\omega_p}{\omega_c})}.$$

4.1.2 切比雪夫 (Chebyshev) 低通滤波器

Butterworth 低通滤波器通带内误差分布不均, 要使阻带特性下降迅速, 则滤波器阶数要增加。若使误差均匀分布在通带内, 可以降低滤波器阶数, 可以通过有等波纹特性逼近函数来实现。I 型 Chebyshev 滤波器通带内等波纹, 阻带内单调下降; II 型 Chebyshev 滤波器相反。以下均讨论 I 型 Chebyshev 滤波器。

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}, \quad \varepsilon \text{ 是决定通带内起伏大小的波动系数, } T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh} x) & |x| > 1 \end{cases} \text{ 为}$$

切比雪夫多项式, 满足 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ 。

幅频特性

- 通带内幅频在 1 和 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ 间做等幅波动, 误差分布均匀。
- 当 $\omega = \omega_c$ 时过 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, 当 $\omega = 0$ 时, 若 n 为偶数 $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, 若 n 为奇数 $|H(0)| = 1$ 。
- 阻带内单调下降。
- 随着 n 增大, 阻带衰减加快, 通带波动次数增加。

$$\text{衰减函数 } \alpha = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})],$$

$$\text{通带最大衰减 } \alpha_{max} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2), \text{ 阻带最小衰减 } \alpha_{min} = 10 \lg[1 + \varepsilon^2 \cosh^2(n \operatorname{arcosh}(\frac{\omega}{\omega_c}))]$$

$$\text{阶数和波动系数的确定: } \varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_{max}} - 1}, \quad n \geq \frac{\operatorname{arcosh}(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1\alpha_{min}} - 1})}{\operatorname{arcosh}(\frac{\omega_s}{\omega_c})}.$$

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\frac{s}{j\omega_c})}, \text{ 极点 } s_k = -\omega_c \sin(\frac{2k-1}{2n}\pi) \sinh(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\varepsilon}) - j\omega_c \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi) \cosh(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\varepsilon})$$

因此 $\frac{\sigma_k^2}{(a\omega_c)^2} + \frac{\omega_k^2}{(b\omega_c)^2} = 1$, $2n$ 个极点分布在椭圆上。以 $\frac{\pi}{n}$ 为间距在小圆上对应的实部和大圆上对应的虚部即为所求极点, 关于虚轴对称。

$$\text{系统函数 } H(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \text{ 其中若 } n \text{ 为奇数 } K = -\prod_{k=1}^n s_k, \text{ 若 } n \text{ 为偶数, } K = \frac{\prod_{k=1}^n s_k}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

卡尔 (Cauer) 低通滤波器 使误差均匀分布在通带和阻带内, 可以进一步降低滤波器阶数。

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}, \text{ 其中 } \varepsilon \text{ 为波动系数, } R_n(x) \text{ 为雅可比椭圆函数。}$$

表 5: 三种模拟滤波器的比较

	Butterworth	Chebyshev	Cauer
实现难度	小	→	大
极点离虚轴距离	远	→	近
裕量要求	多	→	少

4.1.3 模拟滤波器的频率变换

高通滤波器的转化: $\bar{\omega}_p = -\frac{1}{\omega_p}, \bar{\omega}_s = -\frac{1}{\omega_s}$ 。

带通滤波器的转化: $\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}, \bar{\omega}_L = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{B\omega}$, $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$ 为中心频率, $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ 为通带宽度。

带阻滤波器的转化: $\bar{s} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}, \bar{\omega}_H = \frac{B\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\omega_{s1}\omega_{s2}}$ 为中心频率, $B = \omega_{s2} - \omega_{s1}$ 为阻带宽度。

4.2 数字滤波器

原模拟信号经过时域采样, 得到原频谱的周期延拓, 与滤波器频谱函数相乘, 得到处理后的信号频谱, 加窗取出输出信号频谱。

用 LTI 离散系统表示为 $y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$, $H(z) = \frac{\sum b_j z^{-j}}{1 + \sum a_i z^{-i}}$ 。

若 $a_i = 0$, 单位脉冲响应仅有有限项构成, 为有限冲激响应滤波器 (FIR); 若 $a_i \neq 0$, 则分母至少存在一个根无法被分子抵消, 为无限冲激响应滤波器 (IIR)。

4.2.1 无限冲激响应滤波器 (IIR)

设计方法: 模拟化设计法, 即将给定指标转换成模拟滤波器指标, 设计模拟滤波器后转为数字滤波器。

4.2.1.1 冲激响应不变法

冲激响应不变准则: $h(n) = h_a(t)|_{t=nT}$ 。

$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}$, 则 $h_a(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t)$, 采样后 $h_a(nT) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(nT)$,

则 $h(n) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(n)$, $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$

设计步骤: (1) $\Omega = \omega T$, 将数字角频率转化为模拟角频率; (2) 设计模拟滤波器; (3) 利用 Z 反变换将 s 域函数反变换回 z 域。

特点: (1) 模拟角频率和数字角频率之间是线性关系, 线性相位变换后仍是线性的; (2) 具有较好的时域逼近特性, 可以逼近模拟滤波器的冲激响应; (3) 由于映射的多值性容易造成频谱混叠现象。

4.2.1.2 双线性变换法

$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$, $H(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)\right)$, 即 $z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$ 。

设计步骤: (1) 频率预畸变: $\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$ 算出截止频率 ω_c 和 ω_s ; (2) 设计模拟滤波器; (3) $s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$ 代入 $H_a(s)$ 得到 $H(z)$ 。

特点: (1) s 平面到 z 平面的一一映射, 避免频谱混叠; (2) 将 s 域左半平面映射到单位圆内, 保证了稳定性不变; (3) 数字角频率和模拟角频率是非线性的, 会产生频率畸变。

4.2.1.3 IIR 的网络结构

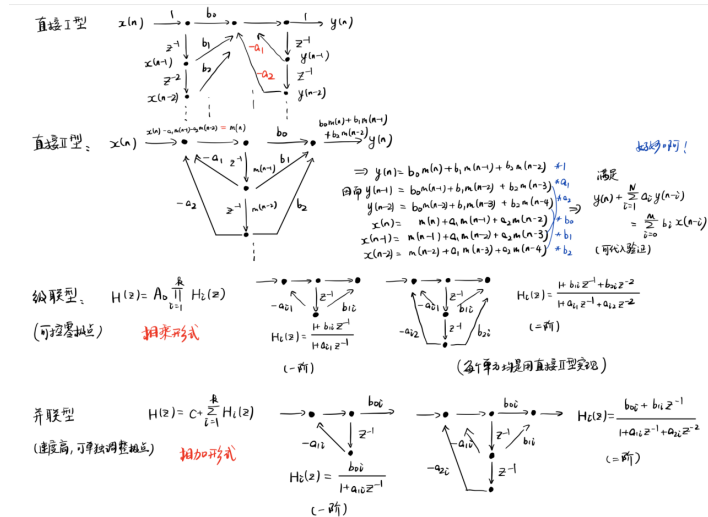


图 5: IIR 的网络结构

4.2.2 有限冲激响应滤波器 (FIR)

FIR 的特点:

- 容易获得严格的线性相频特性;
- 有限长的冲激响应说明系统有在圆周的极点, 一定是稳定的;
- 可以用 FFT 实现, 方便计算机计算。

4.2.2.1 线性相位系统

$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega)e^{-j(a\Omega+b)}$, 相频特性线性变化。时域 $h(n) = \pm h(M-n)$, z 域 $H(z) = \pm z^{-M}H(z^{-1})$

- I 型: $h(n)$ 偶对称且 M 为偶数, $A(\Omega) = \sum_{n=0}^{M/2} a(n) \cos(n\Omega)$, $\varphi(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega$, LPF、BPF、HPF、BSF。
- II 型: $h(n)$ 偶对称且 M 为奇数, $A(\Omega) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} b(n) \cos((n+\frac{1}{2})\Omega)$, $\varphi(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega$, LPF、BPF。
- III 型: $h(n)$ 奇对称且 M 为偶数, $A(\Omega) = \sum_{n=0}^{M/2} c(n) \sin(n\Omega)$, $\varphi(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega + \frac{\pi}{2}$, BPF。
- IV 型: $h(n)$ 奇对称且 M 为奇数, $A(\Omega) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} d(n) \sin((n+\frac{1}{2})\Omega)$, $\varphi(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega + \frac{\pi}{2}$, HPF、BPF、BSF。

若 z_i 为 $H(z)$ 零点, 则 $z_i^{-1}, \bar{z}_i$ 也为 $H(z)$ 零点。线性相位系统零点由以下四种子系统零极点级联构成:

- 非单位圆复零点: $H_1(z) = 1 + az^{-1} + bz^{-2} + az^{-3} + z^{-4}$ 。
- 非单位圆实零点: $H_2(z) = 1 + az^{-1} + z^{-2}$ 。
- 单位圆复零点: $H_3(z) = 1 + az^{-1} + z^{-2}$ 。
- 单位圆实零点: $H_4(z) = 1 \pm z^{-1}$ 。

表 6: 常见的五种窗函数的性能指标

窗函数	主瓣宽度 $2\pi/N$	最大旁瓣电平 dB	过渡带宽度 $2\pi/N$	阻带最小衰减 dB	δ
矩形	2	-13	0.9	-21	0.09
Bartlett	4	-27	2.1	-25	
Hanning	4	-32	3.1	-44	0.0064
Hamming	4	-43	3.3	-53	0.0022
Blackman	6	-58	5.5	-74	0.0002

4.2.2.2 窗函数法

(1) 由 $H_d(\Omega)$ 确定型别、 $A_d(\Omega)$ 和 $\varphi_d(\Omega)$; (2) 由 IDTFT 求 $h_d(n)$; (3) 加窗得 $h(n) = h_d(n)w(n)$; (4)Z 变换得到 $H(z)$ 。

窗函数的主瓣宽度决定过渡带宽度，旁瓣衰减决定阻带衰减。

4.2.2.3 频率抽样法

(1) 由 $H_d(\Omega)$ 确定型别、 $A_d(\Omega)$ 和 $\varphi_d(\Omega)$; (2) 由 $A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}$ 在 $(0, 2\pi)$ 进行 $M + 1$ 次抽样得 $H(m)$; (3) 进行 N 点 IDFT 得 $h(n)$; (4)Z 变换得到 $H(z)$ 。

4.2.2.4 FIR 的网络结构

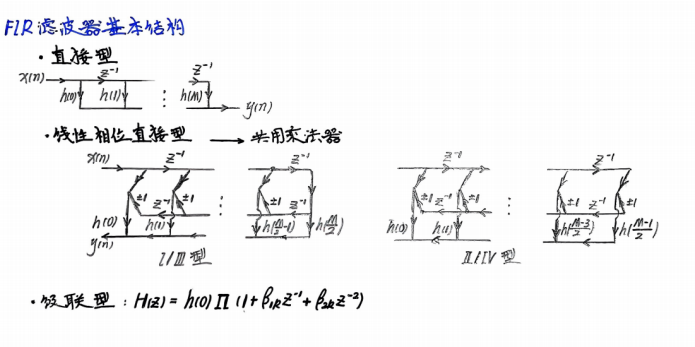


图 6: FIR 的网络结构