

工程电磁场

W • D • Gaster

2025 年 5 月

目录

1	矢量分析	1
1.1	三种坐标系	1
1.2	标量场与梯度	1
1.3	矢量场与散度和旋度	1
1.4	亥姆霍兹定理	1
2	静电场	2
2.1	电场强度与电位	2
2.1.1	静电场中的导体和电介质	2
2.1.2	高斯定律	2
2.2	静电场基本方程	2
2.3	静电场边值问题	2
2.3.1	分界面衔接条件	2
2.3.2	电位的泊松方程和拉普拉斯方程	3
2.3.3	静电场的边界条件	3
2.3.4	唯一性定理	3
2.3.5	镜像法	3
2.4	部分电容	4
2.5	静电能量	4
3	恒定电场	5
3.1	电流与电动势	5
3.1.1	电流	5
3.1.2	电动势	5
3.2	电源外的恒定电场基本方程	5
3.3	恒定电场边值问题	5
3.3.1	分界面衔接条件	5
3.3.2	拉普拉斯方程	6
3.4	静电比拟	6
3.5	部分电导	6
4	恒定磁场	7
4.1	磁场的基本物理量	7
4.1.1	磁感应强度	7
4.1.2	磁介质的磁化	7
4.1.3	安培环路定律	7
4.2	恒定磁场基本方程	7
4.3	恒定磁场的边值问题	7
4.3.1	分界面衔接条件	7
4.3.2	磁矢位	8
4.3.3	磁位	8

4.4	磁场能量	8
5	时变电磁场	9
5.1	麦克斯韦的两大假设	9
5.1.1	电磁感应定律	9
5.1.2	全电流定律	9
5.2	麦克斯韦方程组	9
5.3	时变电磁场的边值问题	9
5.3.1	分界面的衔接条件	9
5.3.2	动态位	10
5.4	电磁功率流	10
5.5	正弦电磁场	10
5.5.1	麦克斯韦方程组的复数形式	11
5.5.2	坡印亭定理的复数形式	11
5.5.3	达朗贝尔方程的复数形式	11
5.6	电磁辐射	11
5.6.1	近区场	11
5.6.2	远区场	12
6	准静态电磁场	13
6.1	电准静态场	13
6.2	磁准静态场	13
6.3	集肤效应	13

1 矢量分析

1.1 三种坐标系

表 1: 三种坐标系的单位元

坐标系	直角坐标系	柱坐标系	球坐标系
单位向量	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$	$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$
元长度	$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$	$d\vec{l} = \vec{e}_r d\rho + \vec{e}_\phi \rho d\phi + \vec{e}_z dz$	$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin \theta d\phi$
元面积	$d\vec{S} = \vec{e}_x dy dz + \vec{e}_y dz dx + \vec{e}_z dx dy$	$d\vec{S} = \vec{e}_\rho \rho d\phi dz + \vec{e}_\phi \rho d\rho dz + \vec{e}_z \rho d\rho d\phi$	$d\vec{S} = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\phi d\theta + \vec{e}_\phi r dr d\theta + \vec{e}_\theta r \sin \theta dr d\phi$
元体积	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

表 2: 三种坐标系的坐标变换

坐标系	坐标变换
直角坐标系	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan \frac{y}{x}, z = z \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \frac{\arctan \sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \phi = \arctan \frac{y}{x}$
柱坐标系	$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \theta = \arctan \rho/z, \phi = \phi$
球坐标系	$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta \quad \rho = r \sin \theta, \phi = \phi, z = r \cos \theta$

1.2 标量场与梯度

等势面方程: $\varphi(x, y, z) = C$

梯度 $\mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$

1.3 矢量场与散度和旋度

矢量线方程: $\vec{A} \times d\vec{l} = 0$

散度: $\mathbf{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

旋度: $\mathbf{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

1.4 亥姆霍兹定理

任意一个矢量场都可以由它的散度、旋度和边界条件唯一确定。

$$\vec{F} = -\nabla \varphi + \nabla \times \vec{A}$$

其中位函数

$$\varphi = \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{R}|} dV', \vec{A} = \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{R}|} dV'$$

也即任意一个矢量场都可以拆成一个旋度为 0 的散度场和一个散度为 0 的旋度场之和。

2 静电场

2.1 电场强度与电位

库仑定律：真空中两个点电荷之间的力， $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{e}_r$

电场强度：单位正试探电荷放入电场中所受的力， $\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$

对于点电荷， $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ ；对于连续分布的电荷，有： $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{e}_R}{R^2} dq$

其中，对于不同形式的电荷， $dq = \rho dV' = \sigma dS' = \tau dl'$

对于点电荷电场，静电力做功 $W_{AB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

因此，静电场是保守场， $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ，旋度 $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，存在一个标量函数使得 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 。

对于点电荷， $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ；对于连续分布的电荷， $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_k}{r - r'_k}$

2.1.1 静电场中的导体和电介质

导体为自由电荷可以在其中自由运动的物质，在外电场作用下，自由电荷的移动将累积在导体表面并建立附加电场，直至附加电场和外电场抵消达到静电平衡状态。此时，导体为等位体，导体表面为等位面，导体表面的场强必定垂直于表面，若导体带电，电荷只能分布于表面。

电介质中的电子被束缚而不能自由运动，在外电场作用下，正负电荷中心不再重合，形成电偶极子，电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{d}$ ，称为介质极化。极化使得介质内部出现连续的电偶极子分布，形成附加电场。

电偶极子产生的电位 $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$

附加电场的电位为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_R}{R^2} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_n}{R} dV'$$

其中极化体电荷 $\rho_p = \nabla' \cdot \vec{P}$ ，极化面电荷 $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$ 。

2.1.2 高斯定律

真空中， $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

介质中， $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q_P}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \vec{P} \cdot d\vec{S}$

故引入电位移（电通量密度） $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ，得 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$ 微分形式为 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

2.2 静电场基本方程

积分形式： $\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$ 微分形式： $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$

物性方程： $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$ (各向同性线性介质)

2.3 静电场边值问题

2.3.1 分界面衔接条件

应用高斯定律的积分形式有 $-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$ ，故 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

应用环路特性有 $E_{1t}\Delta l_1 - E_{2t}\Delta l_2 = 0$, 故 $E_{1t} = E_{2t}$

两种特殊情况:

- 当分界面上自由电荷面密度 $\sigma = 0$ 时, 设 $\vec{D}$ 与法线夹角分别为 α_1, α_2 , 则有 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$
- 当介质 1 是导体时, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{e}_n$

用电位表达如下: $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma$

2.3.2 电位的泊松方程和拉普拉斯方程

将 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 代入高斯定律 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 得

泊松 (Poisson) 方程: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

在没有电荷作用的场域中, 退化为拉普拉斯 (Laplace) 方程: $\nabla^2 \varphi = 0$

2.3.3 静电场的边界条件

第一类边界条件 (Dirichlet 问题): 给定区域边界上的电位值, $\varphi|_S = g_1(\vec{r})$

第二类边界条件 (Neumann 问题): 给定区域边界上的电位的法向导数值, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = g_2(\vec{r})$

第三类边界条件 (Robin 问题): 给定区域边界电位和电位的法向导数线性组合的值, $(\varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n})|_S = g_3(\vec{r})$

自然边界条件: 如果场域伸展到无穷远处, 在无限远处电位为有限值, 即 $\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi$ 存在。

2.3.4 唯一性定理

凡满足电位微分方程和给定边界条件的电位函数 φ , 是给定静电场的唯一解。

2.3.5 镜像法

镜像法是电磁场的一种间接分析方法, 理论基础是唯一性定理, 实质是用研究区域外的虚设镜像电荷代替边界未知电荷的分布, 使计算场域为无限大均匀介质, 原则是电荷分布、介质分布、边界条件不变, 关键是确定镜像电荷的个数、大小和位置, 镜像电荷只能放在待求场域以外的区域。

- 接地无限大导体平板上方距离 d 有一点电荷 q , 电位函数应满足 (1) 除点电荷 q 所在处之外 $\nabla^2 \varphi = 0$;
- 在导体平面和无穷远边界电位 $\varphi = 0$ 。

在导体平面下方对称点处放置一点电荷 $-q$ 并将无限大平板撤去, 空间充满 ε_0 的电介质, 则任一点的电位

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}$$

- 在一半径为 R 的接地导体球外距球心 d 处有一点电荷 q , 电位函数应满足 (1) 除点电荷 q 所在处之外 $\nabla^2 \varphi = 0$;
- 在球面上和无穷远边界电位 $\varphi = 0$

设在点电荷与球心连线上距球心处 b 处放置一镜像电荷 $-q'$,

在球面上任取一点 P , 则 $\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta}} = 0$

解得: $b = \frac{R^2}{d}$, $q' = \frac{R}{d}q$, 则任一点的电位

$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{d} \frac{1}{r'} \right)$, 其中 r, r' 分别为到点电荷 $q, -q'$ 的距离。

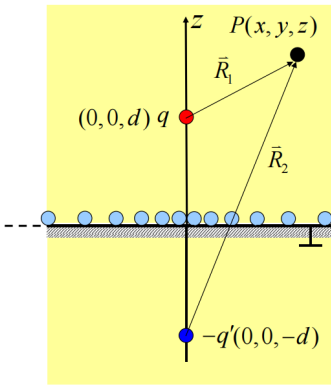
(c) 平面分界面 S 的左右半空间分别充满介电常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的均匀介质, 在左半空间距 S 距离为 d 处有一点电荷 q , 则电位函数满足 (1) 左右半平面分别有 $\nabla^2 \varphi_1 = 0, \nabla^2 \varphi_2 = 0$; (2) 无穷远处电位 $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$; (3) 在分界面 S 上满足衔接条件 $\varphi_1 = \varphi_2, \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

认为左半平面的场由原来的点电荷 q 和像电荷 q' 产生, 此时介电常数 ε_1 的介质充满空间; 右半平面的场由位于原来点电荷处的像电荷 q'' 单独产生, 此时介电常数 ε_2 的介质充满空间。

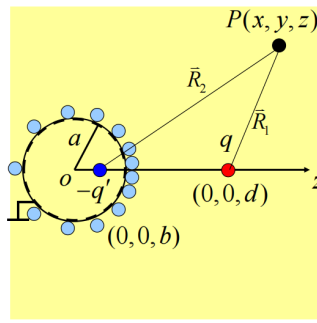
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right), \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q''}{r_1}$$

在 $r_1 = r_2$ 即分界面 S 上, 满足 $\frac{q}{\varepsilon_1} + \frac{q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}, q - q' = q''$

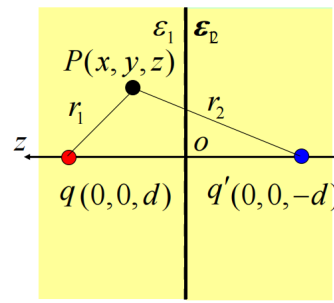
$$\text{解得 } q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$



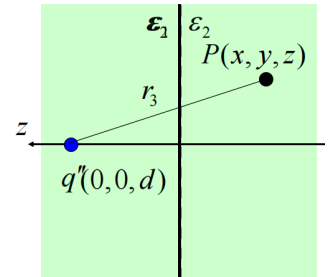
(a) 接地无限大平板



(b) 接地导体球



(c) 左半空间



(d) 右半空间

2.4 部分电容

$$\text{电容的定义: } C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \varepsilon \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

静电独立系统: 电场分布只与系统各带电体的形状、尺寸、相互位置以及电介质的分布有关, 和系统外的带电体无关, 并且所有的电位移从系统的带电体发出, 终止与系统内的带电体上。

对于 $n+1$ 个导体构成的静电独立系统, 令各导体按 $0 \rightarrow n$ 顺序编号, 则必有 $q_0 + q_1 + \cdots + q_n = 0$

$[q] = [C][U]$, 其中 C 为部分电容, 部分电容均为正值, 只与导体形状、尺寸、相互位置和介电常数有关, $[C]$ 是对称阵。

2.5 静电能量

静电能量的来源: 电场建立过程中反抗电场力的外力所做的功。

$$A = \int_0^1 ndn \int_{V'} \varphi dq = \int_0^1 ndn \int_{V'} \varphi \rho dV' = \frac{1}{2} \int_{V'} \varphi \rho dV'$$

对于整个空间, 有:

$$A = \frac{1}{2} \int_V \varphi (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \varphi \vec{D}) dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \varphi \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

由于 $\varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} \propto \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$ 故 $\frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$

因此静电能量 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$, 静电能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

3 恒定电场

3.1 电流与电动势

3.1.1 电流

在导电媒质中, 电荷的运动形成传导电流。在自由空间中, 电荷的运动形成运流电流。

- 体电荷运动, 形成电流(面)密度矢量, $\vec{J} = \rho\vec{v}$, 电流 $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, 元电流段 $\rho\vec{v}dV = \vec{J}dV$ 。
- 面电荷运动, 形成电流线密度矢量, $\vec{K} = \sigma\vec{v}$, 电流 $I = \int_l \vec{K} \cdot \vec{e}_n dl$, 元电流段 $\sigma\vec{v}dS = \vec{K}dS$ 。
- 线电荷运动, 形成线电流密度矢量, $\vec{I} = \tau\vec{v}$, 电流 $I = \tau v$, 元电流段 $\tau\vec{v}dl = \tau v d\vec{l} = I d\vec{l}$ 。

电流连续性原理: 根据电荷守恒, 有 $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$, 在恒定电场中 $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

欧姆定律: 由 $U = IR$ 得, 对于元电流段, 有 $\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \frac{dl}{\gamma dS}$, 故 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

焦耳定律: 功率密度 $p = \frac{dA}{dVdt} = \frac{NdA_e dV}{dVdt} = \frac{N\vec{f} \cdot d\vec{l}}{dt} = \frac{N(-e\vec{E}) \cdot \vec{v}dt}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

3.1.2 电动势

直流电源能将其他形式能量转换成电能, 能把电源内导体分子的正负电荷分开, 使得正负极之间的电压保持恒定, 维持一个恒定电场。电源中能将正负电荷分开的力 f_e 称为局外力, 作用于单位正电荷上的局外力 $\vec{f}_e/q$ 称为局外场强, $\vec{E}_e = \frac{\vec{f}_e}{q}$, 由电源负极指向正极。

则电源电动势 $\mathcal{E} = \int_l \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$, 通过含源导电媒质的电流 $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_e)$

场强的环路积分: 若环路经过电源, 则 $\oint_l (\vec{E} + \vec{E}_e) \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$, 若不经电源, 则 $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

3.2 电源外的恒定电场基本方程

$$\text{积分形式: } \begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \quad \text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

物性方程: $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

3.3 恒定电场边值问题

3.3.1 分界面衔接条件

由 $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 得 $E_{1t} = E_{2t}$

由 $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ 得 $J_{1n} = J_{2n}$

三种特殊情况:

- 介质各向同性时, 设 $\vec{J}$ 与法线夹角分别为 α_1, α_2 , 则有 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ 。
- 当 $\gamma_1 \gg \gamma_2$ 时, 若 $\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2}$, 则 α_2 很小, 分界面附近不良导体内的电流密度近似与分界面垂直, 可将分界面近似看成等位面。

- 介质 2 为理想介质 $\gamma_2 = 0$, $J_{1n} = J_{2n} = 0$, $E = E_{1t} = \frac{J_1}{\gamma_1}$, 电流和导体表面平行, 表面的场强不垂直于分界面, 分界面上有电荷分布, $\sigma = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\gamma_2}{\gamma_1} E_{2n} = (\varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \varepsilon_1) E_{1n}$

用电位表达, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

3.3.2 拉普拉斯方程

在均匀媒质中, 将 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 代入 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 得 $\nabla^2 \varphi = 0$

3.4 静电比拟

表 3: 恒定电场和静电场的对应物理量

静电场 ($\rho = 0$ 处)	$\vec{E}$	φ	$\vec{D}$	q	ε
导电媒质中的恒定电场 (电源外)	$\vec{E}$	φ	$\vec{J}$	I	γ

3.5 部分电导

电导的定义: $G = \frac{I}{U} = \frac{\oint \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \gamma \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$

利用静电比拟, 可得 $\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma}$

对于 $n+1$ 个电极, 令各电极按 $0 \rightarrow n$ 顺序编号, 则必有 $I_0 + I_1 + \cdots + I_n = 0$

$[U] = [R][I]$, 其中 R 为部分电阻, 只与电极形状、尺寸、相互位置和电阻率有关, $[R]$ 是对称阵。

$[I] = [G][U]$, 其中 G 为部分电导, 自有部分电导均为正值, 互有部分电导均为负值, 且自有部分电导大于互有部分电导的绝对值, 只与电极形状、尺寸、相互位置和电导率有关, $[G]$ 是对称阵。

4 恒定磁场

4.1 磁场的基本物理量

4.1.1 磁感应强度

安培力定律：真空中两个细导线电流回路之间的作用力 $\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \oint_{l'} \frac{I d\vec{l} \times (I' d\vec{l}' \times \vec{e}_R)}{R^2}$

毕奥-沙伐定律： $\vec{B} = \frac{d\vec{F}}{Id\vec{l}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{e}_R}{R^2}$

磁通连续性原理： $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ，对于闭曲面， $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

4.1.2 磁介质的磁化

物质磁效应可以用等效的环形电流表示，称作分子电流，分子电流具有分子磁矩（磁偶极矩） $\vec{m} = I\vec{S}$ 。把物体放置在磁场中将会对分子磁矩有转矩作用使分子磁矩与外界磁场方向一致，磁化产生磁性。

在媒质内任取一块面积 S 周界 l ，在边界上取元长度 $d\vec{l}$ ，在其附近磁化均匀，设分子电流面积为 $\vec{a}$ ，则取 $\vec{a}$ 为底，以 $d\vec{l}$ 为高的圆柱， $dI_m = IN\vec{a} \cdot d\vec{l} = N\vec{m} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$

则磁化电流密度 $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ ，在媒质分界面上， $\vec{M} \times \vec{e}_n = \vec{K}_m$

4.1.3 安培环路定律

真空中， $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

媒质中， $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l})$

故引入磁场强度 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ ，得 $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ ，微分形式为 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

4.2 恒定磁场基本方程

积分形式： $\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \end{cases}$ 微分形式： $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$

物性方程： $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H}$ (各向同性线性介质)

4.3 恒定磁场的边值问题

4.3.1 分界面衔接条件

应用安培环路定律的积分形式有 $H_{1t}\Delta l_1 - H_{2t}\Delta l_2 = K\Delta l_1$ ，故 $H_{1t} - H_{2t} = K$ ，当 K 与 H_{1t} 构成右手螺旋关系时取正值。

理论上，在理想导体、超导体表面才有可能有面电流 K 的存在。工程上，只有当集肤效应十分显著时，才可以近似将表面电流视为面电流分布。

应用磁通连续性原理有 $B_{1n}\Delta S - B_{2n}\Delta S = 0$ ，故 $B_{1n} = B_{2n}$

折射定律：当分界面上电流线密度 $K = 0$ 时，设 $\vec{B}$ 与法线夹角分别为 α_1, α_2 ，则有 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

4.3.2 磁矢位

磁感应强度表达式可写为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \vec{J} \times \frac{\vec{e}_R}{R^2} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \vec{J} \times \left(-\nabla \frac{1}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} (\nabla \times \frac{\vec{J}}{R}) dV' = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dV' + \nabla h + C \right)$$

由磁场的无散性引入磁矢位 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 遵循库仑规范: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$, 即得到磁矢位的泊松方程: $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$

$$\text{得 } \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} dV'}{R}$$

$$\text{衔接条件 } \vec{A}_1 = \vec{A}_2, \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) \times \vec{e}_n = \vec{K}$$

$$\text{对于平行平面磁场, 有 } A_1 = A_2, \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = K$$

4.3.3 磁位

在没有电流分布的区域内, $\nabla \times \vec{H} = 0$, 此时引入磁位 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$, 磁压 $U_{mAB} = \int_{AB} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB}$, 但是磁压与积分路径有关, 即磁位具有多值性。

$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = \nabla \cdot (-\mu \nabla \varphi_m) = -\nabla \varphi_m \cdot \nabla \mu - \mu \nabla \cdot \nabla \varphi_m = 0$, 即得到磁位的拉普拉斯方程: $\nabla^2 \varphi_m = 0$

$$\text{衔接条件: } \varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$$

4.4 磁场能量

磁场能量的来源: 磁场建立过程中外力克服电动势所做的功。

对于单回路, 由于 $dA = u idt = L \frac{di}{dt} idt = L i di$, 故 $W_m = \int dA = \frac{1}{2} LI^2$

对于多回路,

$$W_m = \int dA = \int \sum_{k=1}^n \frac{d(m\Psi_k)}{dt} m I_k dt = \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k \int_0^1 m dm = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k$$

$$\text{将 } \Psi_k = \oint_{l_k} \vec{A} \cdot d\vec{l} \text{ 代入得 } W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dV,$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \frac{1}{2} \oint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

由于 $\vec{H} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \propto \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot r^2 \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$ 故 $\frac{1}{2} \oint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = 0$

$$\text{磁场能量 } W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV, \text{ 磁场能量密度 } w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

5 时变电磁场

5.1 麦克斯韦的两大假设

5.1.1 电磁感应定律

法拉第电磁感应定律： $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

麦克斯韦的假设 1：变化磁场产生感应电场 $\vec{E}_i$ ，电磁感应定律无需回路存在，则总场强 $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i$ 。

感应电场的基本方程：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E}_i = 0 \end{cases}$$

5.1.2 全电流定律

对于含容交变电流电路，安培环路定律不成立，电流不连续。

麦克斯韦的假设 2：电容器极板间存在位移电流密度， $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，则全电流 $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_d$ 。

位移电流有磁效应，能激发磁场，但无热效应，不产生焦耳热，实质是变化的电场产生磁场。

5.2 麦克斯韦方程组

$$\text{积分形式: } \begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \end{cases} \quad \text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

对于各向同性的媒质，有辅助方程（构成关系）： $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \gamma \vec{E}$

给出初始条件和边界条件并给定电荷、电流的分布，则可以由麦克斯韦方程组确定唯一的电磁场。

电场和磁场相互耦合、相互为源，可以脱离电荷和电流独立存在，在空间中以电磁波形式传播。

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

5.3 时变电磁场的边值问题

5.3.1 分界面的衔接条件

$$B_{1n} = B_{2n}, D_{2n} - D_{1n} = \sigma, H_{1t} - H_{2t} = K, E_{1t} = E_{2t}$$

两种特殊情况：

- 两种理想介质分界面， $K = 0, \sigma = 0$ ，则 $H_{2t} = H_{1t}, E_{2t} = E_{1t}, B_{2n} = B_{1n}, D_{2n} = D_{1n}$ ，满足折射定律： $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ 。
- 当媒质 1 为理想导体时，有 $H_{2t} = K, B_{2n} = 0, E_{2t} = 0, D_{2n} = \sigma$

5.3.2 动态位

由 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 引入矢量位 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 代入 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 得 $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$, 引入标量位 $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ 标量位 φ 和矢量位 $\vec{A}$ 随时间变化, 称作动态位函数, 简称动态位。满足洛伦兹规范: $\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

代入 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 和 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 得达朗贝尔方程
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

达朗贝尔方程的解为:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV', \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV'$$

激励源在 t 时刻的作用, 要经过一个推迟时间 $\frac{R}{v}$ 才能到达场点, 这个时间也正是电磁波的传播时间, 因此也称动态位为推迟位, 电磁波传播速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

5.4 电磁功率流

电磁场能量为 $W = \int_V (\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \int_V (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV \\ &= \int_V (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}) dV \\ &= - \int_V (\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J}) dV \\ &= - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV - \oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

将 $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} - \vec{E}_e$ 代入得电磁能流定理 (坡印亭定理):

$$\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \int_V \frac{J^2}{\gamma} dV + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_e dV$$

式子左端表示向外输送的电磁能量, 右端分别表示体积内减少的电磁能量、焦耳热损耗的能量和电源提供的能量。

坡印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, 表示单位时间内通过垂直于能量传播方向的单位面积的电磁能量。

5.5 正弦电磁场

$\vec{E}(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_x) \vec{e}_x + E_{ym}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_y) \vec{e}_y + E_{zm}(x, y, z) \cos(\omega t + \phi_z) \vec{e}_z$

令 $\dot{\vec{E}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{xm}(x, y, z) e^{j\phi_x} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} E_{ym}(x, y, z) e^{j\phi_y} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}} E_{zm}(x, y, z) e^{j\phi_z} \vec{e}_z$

得 $\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\dot{\vec{E}}(x, y, z) \sqrt{2} e^{j\omega t}]$

5.5.1 麦克斯韦方程组的复数形式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

构成关系: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{J} = \gamma\vec{E}$

5.5.2 坡印亭定理的复数形式

坡印亭矢量瞬时值 $\vec{S}(t) = \sqrt{2}\vec{E} \cos(\omega t + \phi_E) \times \sqrt{2}\vec{H} \cos(\omega t + \phi_H)$

一个周期的平均值 $\vec{S}_{av} = (\vec{E} \times \vec{H}) \cos(\phi_E - \phi_H) = \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

复坡印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$

对复坡印亭矢量取散度并展开得复数形式坡印亭定理

$$-\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{|\vec{J}|^2}{\gamma} dV + j\omega \int_V (\mu|\vec{H}|^2 - \epsilon|\vec{E}|^2) dV - \int_V \vec{E}_e \cdot \vec{J}^* dV$$

左边表示流入闭合面的复功率, 右边分别表示导电媒质消耗的功率即有功功率 P 、电磁能量的平均值即无功功率 Q 和电源提供的复功率。

5.5.3 达朗贝尔方程的复数形式

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2 \dot{\varphi} + \beta^2 \dot{\varphi} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

其中 $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 称为相位常数, 时间上推迟 $\Delta t = \frac{R}{v}$, 相位上滞后 $\omega\Delta t = \omega\frac{R}{v} = \beta R$, 可以衡量单位长度内全波的数目, 又称波数或空间频率, 因此动态位也称作滞后位。

动态位的复数解形式为:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} e^{-j\beta R}}{R} dV', \dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho e^{-j\beta R}}{R} dV'$$

5.6 电磁辐射

单位偶极子天线是一段长 Δl 的载流细导线, 长度和横截面积都比电磁波长和与观察点距离小得多, 认为电流均匀同相, 任一观察点到天线距离相同。

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{j\Delta l}{4\pi r^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r} (1 + j\frac{2\pi r}{\lambda}) \sin\theta \vec{e}_\phi \\ \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{j\Delta l}{2\pi r^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r} (1 - j\frac{\lambda}{2\pi r}) \cos\theta \vec{e}_r + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{j\Delta l}{4\pi r^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r} (1 + j\frac{2\pi r}{\lambda} - j\frac{\lambda}{2\pi r}) \sin\theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

5.6.1 近区场

当 $r \ll \lambda$ 时, 含有 $\frac{r}{\lambda}$ 的高次项可忽略且 $e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r} \approx 1$, 令 $\dot{p} = \frac{j\Delta l}{j\omega}$ 。

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{j\Delta l \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\phi \\ \vec{E} = \frac{2\dot{p} \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{\dot{p} \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

近区的电磁场的场和源相位相同, 推迟效应可忽略, 与恒定电磁场分布特性完全相同, 电场滞后于磁场 90° , 平均能流为零, 只有电能和磁能的交换。

5.6.2 远区场

当 $r \gg \lambda$ 时, 含有 $\frac{r}{\lambda}$ 的低次项可忽略, 略去零次项和负一次项, 仅保留一次项。

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}} = j \frac{I \Delta l \sin \theta}{2 \lambda r} e^{-j \frac{2 \pi r}{\lambda}} \vec{e}_\phi \\ \dot{\vec{E}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} j \frac{I \Delta l \sin \theta}{2 \lambda r} e^{-j \frac{2 \pi r}{\lambda}} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

远区电磁场相位随 r 的增大而不断落后, 电场和磁场具有行波的性质, 同一个球面上具有相同的相位为等相面, 电磁波是球面波。在空间上, 电场、磁场和波传播方向相互垂直, 且幅值之比 $Z_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega$ 称为波阻抗。远区电场强度、磁场强度、坡印亭矢量都和角度有关, 电磁波具有一定的方向性。

穿过半径为 r 的球面向外辐射的总电磁功率 $P = \oint_A \text{Re}[\vec{S}] \cdot d\vec{A} = I^2 [80\pi^2 (\frac{\Delta l}{\lambda})^2]$ 称 $R_e = 80\pi^2 (\frac{\Delta l}{\lambda})^2$ 为单位偶极子天线的辐射电阻, 表征天线辐射电磁能量的能力。

6 准静态电磁场

6.1 电准静态场

当感应电场远小于库仑电场即 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$ 时, 电准静态场 (EQS) 具有和静电场类似的有源无旋性。

常见的电准静态场: 电力传输系统中的高压电场、电子器件附近的电场、低频交流下平板电容器中的电场。

对 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 取散度可得 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0$

通解为 $\rho = \rho_0(x, y, z)e^{-t/\tau_e}$, 其中 $\tau_e = \frac{\epsilon}{\gamma}$ 称为弛豫时间, 说明导体中自由电荷体密度按指数形式衰减。

电位的通解 $\varphi = \int_V \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon R} e^{-t/\tau_e} dV = \varphi_0(x, y, z)e^{-t/\tau_e}$, 同样按指数形式衰减。

6.2 磁准静态场

当位移电流远小于传导电流即 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$ 时, 磁准静态场 (MQS) 具有和静磁场类似的有旋无源性。

似稳条件: 导体中 $\omega\epsilon \ll \gamma$, 介质中 $\beta r \ll 1$ 或 $r \ll \lambda$

常见的磁准静态场: 低频下电磁装置 (电机、变压器、磁悬浮等) 中的磁场、电工技术中的涡流问题。

磁准静态场是交流电路的场理论的基础, 在磁准静态场条件下, 基尔霍夫定律才能成立。

由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ 两边取旋度并消去 $\vec{J}$,

得 $\nabla^2 \vec{H} = \mu\gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, $\nabla^2 \vec{E} = \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $\nabla^2 \vec{J} = \mu\gamma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ 。

6.3 集肤效应

集肤效应: 当交变电流流过导体时, 靠近导体表面电流密度大, 越深入导体内部, 电流密度越小, 当频率很高时, 几乎只在导体表面附近一薄层中存在。

电流密度矢量的微分方程在一维情况下的解是幅值以 $e^{-\alpha x}$ 的指数形式衰减、相位以 $e^{-j\beta x}$ 的形式移动。其中 $k = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1 + j)$

透入深度: 表示场量在良导体中的集肤程度, 等于场量振幅衰减为 $\frac{1}{e}$ 时所经过的距离, $d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$ 。

交流内阻抗: 交流情况下由于集肤效应, 电流和电磁场集中于表面附近, 导致实际载流面积减小, 此时导体的电阻和电抗与直流时不同。

$$R = \frac{1}{I^2} \text{Re}[-\oint_A (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot d\vec{A}], X = \frac{1}{I^2} \text{Im}[-\oint_A (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot d\vec{A}]$$