

现代电机控制技术

W.D.Gaster

2026 年 7 月

目录

1	电磁转矩和空间矢量	1
1.1	电磁转矩	1
1.1.1	机电能量转换原理	1
1.1.2	电机的电磁转矩	4
1.2	空间矢量	5
1.2.1	磁动势矢量	5
1.2.2	电流电压矢量	6
1.2.3	磁链矢量	6
1.2.4	电磁转矩的矢量表达	7
1.2.5	坐标变换	7
2	三相感应电动机矢量控制	10
2.1	基于转子磁场定向的矢量方程	10
2.1.1	转矩控制	10
2.1.2	三相感应电动机的矢量方程	12
2.2	转子磁场定向的矢量控制	14
2.2.1	直接磁场定向	14
2.2.2	间接磁场定向	15
2.2.3	基于转子磁场定向的伺服系统	16
2.2.4	电流控制模式	18
2.3	双馈感应电机矢量控制	21
2.3.1	基于定子磁场定向的矢量控制	22
2.3.2	矢量控制的运行状态	24
2.3.3	矢量控制系统	25
3	三相永磁同步电动机矢量控制	26
3.1	基于转子磁场定向的矢量方程	26
3.1.1	永磁同步电动机的结构和模型	26
3.1.2	面装式永磁同步电动机的矢量方程	27
3.1.3	插入式永磁同步电动机的矢量方程	28
3.2	基于转子磁场定向的矢量控制系统	30
3.2.1	面装式永磁同步电动机的矢量控制	30
3.2.2	插入式永磁同步电机的矢量控制	31
3.2.3	定子电流最优控制	33
3.2.4	谐波转矩和转速波动	35
4	直接转矩控制	37
4.1	直接转矩控制原理	37
4.1.1	控制原理	37
4.1.2	控制方式	38
4.2	直接转矩控制系统	38

4.2.1	滞环比较控制	39
4.2.2	磁链和转矩估计	41
4.2.3	预期电压直接转矩控制	41
5	无速度传感器控制	44
5.1	基于数学模型的开环估计	44
5.1.1	感应电动机转速估计	44
5.1.2	永磁同步电动机转子位置估计	44
5.2	模型参考自适应系统	45
5.2.1	模型设计	45
5.2.2	自适应律	45
5.3	自适应观测器	47
5.3.1	状态估计方程和状态观测器	47
5.3.2	转速自适应律	48
5.4	扩展卡尔曼滤波	49
5.4.1	数学模型	49
5.4.2	状态估计	50

1 电磁转矩和空间矢量

1.1 电磁转矩

1.1.1 机电能量转换原理

单线圈励磁

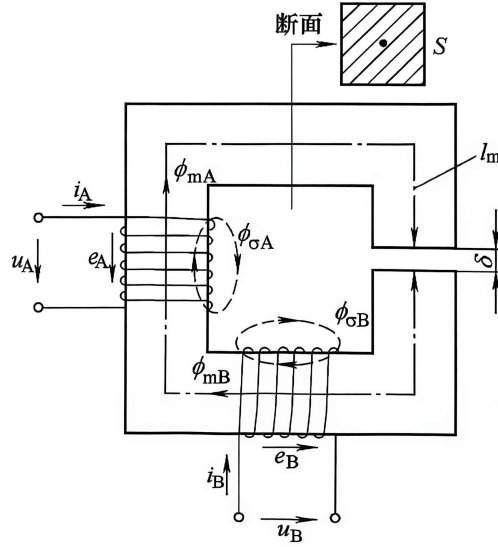


图 1.1: 双绕组线圈励磁磁路

对于单线圈励磁的磁路，磁通可表示为

$$\psi_A = \psi_{\sigma A} + \psi_{mA} = L_{\sigma A} i_A + L_{mA} i_A = L_A i_A$$

其中 $L_{mA} = N_A^2 \Lambda_{m\delta}$ 为励磁电感， $L_{\sigma A}$ 为漏电感， L_A 为自感。

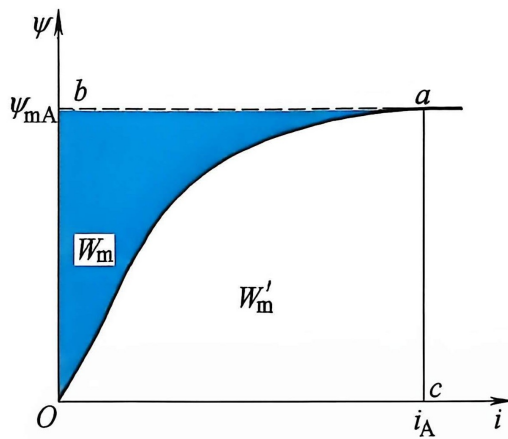


图 1.2: 磁路的 $\psi - i$ 曲线

磁通从 0 增长到 ψ_{mA} 时，磁链从 0 增长到 Ψ_{mA} ，磁场能量 W_m 为

$$W_m = \int_0^{\Psi_{mA}} i_A d\Psi$$

以电流为自变量，对磁链进行积分，则有磁共能 W'_m 为

$$W'_m = \int_0^{i_A} \Psi_{mA} di$$

两者满足

$$W_m + W'_m = i_A \Psi_{mA}$$

忽略铁心磁路的磁阻时， $\psi - i$ 曲线是一条直线，则有

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} i_A \psi_{mA} = \frac{1}{2} L_{mA} i_A^2 = \frac{1}{2} f_A B_\delta S = \frac{1}{2} \frac{B_\delta^2}{\mu_0} V_\delta$$

双线圈励磁

对双线圈励磁的磁路，磁通可表示为

$$\psi_A = L_{\sigma A} i_A + L_{mA} i_A + L_{AB} i_B = L_A i_A + L_{AB} i_B$$

其中 $L_{AB} = N_A N_B \Lambda_\delta$ 为互感。

磁场能量 W_m 为

$$W_m(\psi_A, \psi_B) = \int_0^{\Psi_A} i_A d\Psi + \int_0^{\Psi_B} i_B d\Psi$$

以电流为自变量，对磁链进行积分，则有磁共能 W'_m 为

$$W'_m(i_A, i_B) = \int_0^{i_A} \Psi_A di + \int_0^{i_B} \Psi_B di$$

两者满足

$$W_m + W'_m = i_A \Psi_A + i_B \Psi_B$$

若磁路为线性，则有

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} i_A \psi_A + \frac{1}{2} i_B \psi_B = \frac{1}{2} L_A i_A^2 + L_{AB} i_A i_B + \frac{1}{2} L_B i_B^2$$

机电能量转换

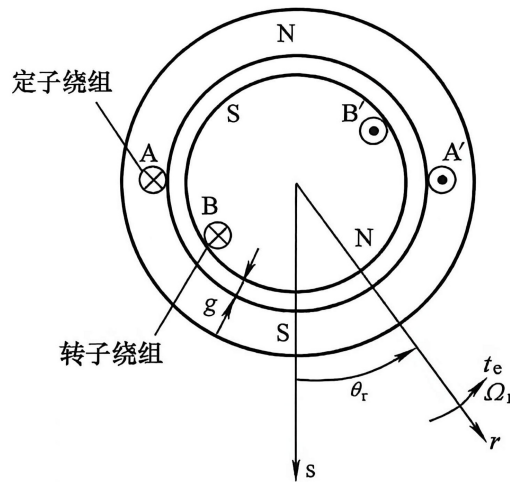


图 1.3: 定转子结构的机电装置

A 为定子绕组, B 为转子绕组, 且 $N_A = N_B$, 气隙是均匀的。转子旋转时, 定转子的励磁电感 L_{mA}, L_{mB} 不变且相等, 但互感与位置有关, 即

$$L_{AB}(\theta_r) = L_{BA}(\theta_r) = M_{AB} \cos \theta_r$$

因此磁能 (磁共能) 除了是磁链 (电流) 的函数外, 还是转角 θ_r 的函数, 则磁能和磁共能的全微分为

$$\begin{aligned} dW_m &= \frac{\partial W_m}{\partial \psi_A} d\psi_A + \frac{\partial W_m}{\partial \psi_B} d\psi_B + \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} d\theta_r = i_A d\psi_A + i_B d\psi_B + \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} d\theta_r \\ dW'_m &= \frac{\partial W'_m}{\partial i_A} di_A + \frac{\partial W'_m}{\partial i_B} di_B + \frac{\partial W'_m}{\partial \theta_r} d\theta_r = \psi_A di_A + \psi_B di_B + \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} d\theta_r \end{aligned}$$

在 dt 时间内转子转过 $d\theta_r$, 则受到的电磁转矩克服机械转矩所做的机械功为

$$\begin{aligned} dW_{mech} &= t_e d\theta_r = dW_e - dW_m \\ &= (i_A d\psi_A + i_B d\psi_B) - (i_A d\psi_A + i_B d\psi_B + \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} d\theta_r) = -\frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} d\theta_r \\ &= (i_A d\psi_A + i_B d\psi_B) - d(i_A \psi_A + i_B \psi_B - W'_m) = -(\psi_A di_A + \psi_B di_B) + dW'_m \end{aligned}$$

因此电磁转矩为

$$t_e = -\frac{\partial W_m(\psi_A, \psi_B, \theta_r)}{\partial \theta_r} = \frac{\partial W'_m(i_A, i_B, \theta_r)}{\partial \theta_r}$$

即当转子产生微小位移时, 电磁转矩方向与系统磁能减小的方向或系统磁共能增大的方向相同。

利用式子 $W_m = W'_m = \frac{1}{2} L_A i_A^2 + L_{AB} i_A i_B + \frac{1}{2} L_B i_B^2$ 对磁共能求偏导得

$$t_e = i_A i_B \frac{\partial L_{AB}(\theta_r)}{\partial \theta_r} = -i_A i_B M_{AB} \sin \theta_r$$

转子不动时, $dW_{mech} = 0$, 电源的净电能全部转换为磁场储能; 转子旋转时, 部分磁场能量会释放转化为机械能。此时感应电动势为

$$e_A = -\frac{d\psi_A}{dt} = -\frac{d}{dt} [L_A i_A + L_{AB}(\theta_r) i_B] = -\left[L_A \frac{di_A}{dt} + L_{AB}(\theta_r) \frac{di_B}{dt} + i_B \frac{\partial L_{AB}(\theta_r)}{\partial \theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \right]$$

其中第一项和第二项是 $\theta_r = \text{Const}$, 即绕组 A 和绕组 B 相互静止时电流变化引起的感应电动势, 称为变压器电动势; 第三项是因转子运动使绕组 A 和绕组 B 相对位置发生位移引起的感应电动势, 称为运动电动势。

电源输入绕组的净电能为

$$dW_e = \psi_A di_A + \psi_B di_B + 2i_A i_B \frac{\partial L_{AB}(\theta_r)}{\partial \theta_r} d\theta_r$$

前两项为电流变化产生变压器电动势所吸收的电能, 第三项是转子旋转引起的运动电动势吸收的电能。

由磁场储能转换的机械能为

$$dW_{mech} = t_e d\theta_r = i_A i_B \frac{\partial L_{AB}(\theta_r)}{\partial \theta_r} d\theta_r$$

磁场的能量变化, 是由绕组中的变压器电动势从电源吸收的全部电能加上运动电动势从电源吸收的 1/2 的电能所提供, 运动电动势吸收的另外 1/2 电能称为转换功率, 由电能转换为机械功率。产生感应电动势是耦合场吸收电能的必要条件, 产生运动电动势是耦合场实现机电能量转换的关键, 运动电动势和电磁转矩构成了一对机电耦合项, 是机电能量转换的核心部分。

1.1.2 电机的电磁转矩

电磁转矩的生成

励磁磁通为

$$\phi_{mA} = \frac{2}{\pi} B_{mA \max} l_r \tau = D_r l_r B_{mA \max} = \frac{1}{N_B} M_{AB} i_A$$

其中 τ 为极距, D_r 为转子外径, 满足 $\pi D_r = 2\tau$

对线圈 B, 电磁力为

$$f_{eB} = N_B i_B l_r B_{mA \max} \sin \theta_r = \frac{1}{D_r} \phi_{mA} i_B \sin \theta_r = \frac{1}{D_r} i_A i_B M_{AB} \sin \theta_r$$

线圈 B' 受到的电磁力与线圈 B 大小相等方向相同, 则绕组 B 产生的电磁转矩为

$$t_e = \frac{D_r}{2} (f_{eB} + f_{eB'}) = i_A i_B M_{AB} \sin \theta_r = \frac{1}{L_m} \psi_{mA} \psi_{mB} \sin \theta_r$$

由于励磁磁链

$$\psi_m = \phi_m N = \frac{2}{\pi} B_{m \max} l_r \tau N$$

因此在机电结构装置确定后, 磁链仅取决于磁场幅值, ψ_{mA}, ψ_{mB} 分别代表了定转子绕组 A 和 B 产生的径向磁场, θ_r 为两磁场轴线的空间相位角。电磁转矩可以看成是定转子径向励磁磁场相互作用的结果。

三种电机的电磁转矩

对于直流电机, 将转子绕组改造为换向器绕组, 使得定转子磁场轴线相对静止。将换向器绕组等效为 q 轴上的 q 轴线圈, q 轴线圈运动但是产生的磁场却静止不动, 称为伪静止线圈。电磁转矩满足

$$t_e = i_f i_q L_{mf} = \psi_f i_q$$

对于三相同步电机, 将定子绕组改为三相对称绕组并通入三相对称正弦电流产生旋转磁场, 旋转磁场轴线在转子 dq 轴系下空间相位角 β 。将定子的三相绕组等效为 s 轴上的单轴线圈 s, 将转子的分布绕组等效为集中绕组 f。电磁转矩实际方向使 β 减小, 对于隐极同步电机, 电磁转矩为

$$t_e = i_s i_f L_m \sin \beta = \psi_f i_s \sin \beta$$

对于凸极式电机, 定子绕组自感为

$$L_A(\theta_r) = \frac{1}{2}(L_d + L_q) + \frac{1}{2}(L_d - L_q) \cos 2\theta_r = L_0 + \Delta L \cos 2\theta_r$$

以逆时针为正, 由转子转动使气隙磁导发生变化引起的磁阻转矩为

$$t_e = -\Delta L i_A^2 \sin 2\theta_r = -\frac{1}{2}(L_d - L_q) i_A^2 \sin 2\theta_r$$

则电磁转矩为

$$t_e = i_s i_f L_m \sin \beta + \frac{1}{2}(L_d - L_q) i_s^2 \sin 2\beta = \psi_f i_s \sin \beta + \frac{1}{2}(L_d - L_q) i_s^2 \sin 2\beta$$

对于三相感应电机, 定子绕组改为三相对称绕组并通入三相对称正弦电流产生旋转磁场, 转子绕组也改为三相对称绕组且短接。将定子绕组等效为 s 轴线圈, 转子绕组等效为 r 轴线圈, 电磁转矩为

$$t_e = -i_s i_r M_{sr} \sin \theta_{sr}$$

电磁转矩的控制

对于电动机，机械运动方程为

$$t_e = J \frac{d\Omega_r}{dt} + R_\Omega \Omega_r + t_L$$

其中 t_L 为负载转矩，包括电动机空载损耗引起的恒定的阻力转矩的空载转矩； Ω_r 为转子机械角速度； J 为系统转动惯量； R_Ω 为阻尼系数。

若电气传动对旋转角位移提出控制要求，构成位置随动系统，又称伺服系统，此时有

$$t_e = J \frac{d^2\theta_\Omega}{dt^2} + R_\Omega \frac{d\theta_\Omega}{dt} + t_L$$

不论是控制负载运动的转速或者角位移，都是通过控制转矩 $t_e - t_L$ 实现的。因此对电动机的控制归根结底是对电磁转矩的控制。

1.2 空间矢量

在电机内，可以将在空间按正弦分布的物理量表示为空间矢量 $\mathbf{r} = Re^{j\theta}$ 。

1.2.1 磁动势矢量

实际绕组会用整距或短距分布代替以产生梯形磁动势波，此时 A 相绕组产生的磁动势波的基波幅值为

$$F_A(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} N_s k_{ws1} i_A(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} N_s k_{ws1} \sqrt{2} I_s \cos(\omega_s t + \phi_1) = F_1 \cos(\omega_s t + \phi_1)$$

对应的空间矢量为

$$\mathbf{f}_A = F_A(t) e^{j0^\circ} = F_1 \cos(\omega_s t + \phi_1) e^{j0^\circ}$$

三相绕组产生的基波合成磁动势为

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C = a^0 F_A(t) + a F_B(t) + a^2 F_C(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} N_s k_{ws1} [a^0 i_A(t) + a i_B(t) + a^2 i_C(t)]$$

其中空间算子 $a^0 = e^{j0^\circ}$, $a = e^{j120^\circ}$, $a^2 = e^{j240^\circ}$

定子电流为三相对称正弦电流时，则有

$$\mathbf{f}_s = \frac{3}{2} F_1 e^{j(\omega_s t + \phi_1)}$$

转子基波分量为

$$F_a(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} N_r k_{wr1} i_a(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} N_r k_{wr1} \sqrt{2} I_r \cos(\omega_f t + \phi_2) = F_2 \cos(\omega_f t + \phi_1)$$

转子基波合成磁动势

$$\mathbf{f}_r = [a^0 F_A(t) + a F_B(t) + a^2 F_C(t)] e^{j\theta_r}$$

正弦稳态下，磁动势为

$$\mathbf{f}_r = \frac{3}{2} F_2 e^{j(\omega_s t + \phi_2)}$$

若取转子 a 轴作为复平面的实轴，则转子磁动势

$$\mathbf{f}_r^{abc} = \frac{3}{2} F_2 e^{j(\omega_f t + \phi_2)} = \mathbf{f}_r e^{-j\theta_r}$$

因此转子磁动势

$$\mathbf{f}_r = [a^0 F_A(t) e^{j\theta_r} + a F_B(t) e^{j\theta_r} + a^2 F_C(t) e^{j\theta_r}] e^{j0^\circ}$$

说明变换后转子 abc 轴系已经是静止轴系，转子 a 轴与定子 A 轴一致。将转子磁动势矢量从转子 abc 系变换到定子 ABC 系，相当于以一个静止的转子代替实际旋转的转子，并用转差频率 ω_f 代替定子电角频率 ω_s ，保持电流幅值不变。从机电能量转换角度看，两者是等效的。这就是电机学的转子频率归算。在进行绕组归算，即可使用变换后的模型分析转矩生成与控制。

1.2.2 电流电压矢量

在 f_s 轴线上的单轴线圈的电流即为定子电流空间矢量

$$\mathbf{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 i_A + a i_B + a^2 i_C)$$

在 ABC 轴系内, 转子电流矢量

$$\mathbf{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 i_A + a i_B + a^2 i_C) e^{j\theta_r} = \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 i'_A + a i'_B + a^2 i'_C)$$

正弦稳态下, 分别有

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_s &= \sqrt{3} I_s e^{j(\omega_s t + \phi_1)} & |\mathbf{i}_s| &= \sqrt{3} I_s \\ \mathbf{i}_r &= \sqrt{3} I_r e^{j(\omega_s t + \phi_2)} & |\mathbf{i}_r| &= \sqrt{3} I_r \end{aligned}$$

电机稳态运行时, 定转子单轴线圈通入的均是恒定直流, 定转子单轴线圈同步旋转, 空间相位 θ_{sr} 保持不变, 从电磁转矩生成的角度看, 相当于将一台三相感应电动机变换为一台直流电动机, 不过定转子轴线不正交, 电刷逆时针旋转了 $\theta_{sr} - 90^\circ$ 电角度。

将外加相电压与相绕组产生的磁动势和磁场联系起来时, 电压也可以被赋予空间含义, 此时定子电压矢量可以表示为

$$\mathbf{u}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 u_A + a u_B + a^2 u_C)$$

1.2.3 磁链矢量

由于磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是微观磁量, 反应某一点磁场值, 不能表示磁场整体的变化和对外的作用, 因此不能代替空间矢量。由于磁通

$$\phi_{mA} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} l_s R_s B_{gA \max} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} B_{gA \max} l_s \tau$$

为磁感应强度在一个极下的集合, 更能反应磁场整体性, 在电机结构确定后, 仅与磁场幅值成正比, 因此定义磁通为空间矢量。磁链与磁通存在固定倍比关系, 因此也是空间矢量。定转子磁链矢量分别为

$$\begin{aligned} \psi_s &= \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 \psi_A + a \psi_B + a^2 \psi_C) \\ \psi_r &= \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 \psi_a + a \psi_b + a^2 \psi_c) e^{j\theta_r} \end{aligned}$$

令 L_{m1} 为定转子各相绕组励磁电感, $L_{s\sigma}$ 为定子漏电感, $L_{r\sigma}$ 为转子漏电感, 则定转子自感分别为

$$\begin{aligned} L_A &= L_B = L_C = L_{s1} = L_{m1} + L_{s\sigma} \\ L_a &= L_b = L_c = L_{r1} = L_{m1} + L_{r\sigma} \end{aligned}$$

定子绕组间互感和转子绕组间互感分别为

$$\begin{aligned} L_{AB} &= L_{BA} = L_{AC} = L_{CA} = L_{BC} = L_{CB} = L_{m1} \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} L_{m1} \\ L_{ab} &= L_{ba} = L_{ac} = L_{ca} = L_{bc} = L_{cb} = L_{m1} \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} L_{m1} \end{aligned}$$

定转子间互感为

$$\begin{aligned} L_{Aa} &= L_{aA} = L_{Bb} = L_{bB} = L_{Cc} = L_{cC} = L_{m1} \cos \theta_r \\ L_{Ac} &= L_{cA} = L_{Ba} = L_{aB} = L_{bC} = L_{Cb} = L_{m1} \cos(\theta_r - 120^\circ) \\ L_{Ab} &= L_{bA} = L_{Ca} = L_{aC} = L_{cB} = L_{Bc} = L_{m1} \cos(\theta_r + 120^\circ) \end{aligned}$$

三相电机的磁链方程为

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & L_{AC} & L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{BA} & L_B & L_{BC} & L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_C & L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \\ L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} & L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} & L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} & L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

利用 $i_A + i_B + i_C = 0$ 和 $i'_a + i'_b + i'_c = 0$, 定转子磁链方程分别可以写成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{ss} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{sr} \begin{bmatrix} i'_a \\ i'_b \\ i'_c \end{bmatrix} = (L_{ss} + \frac{3}{2}L_{m1}) \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \frac{3}{2}L_{m1} \begin{bmatrix} i'_a \\ i'_b \\ i'_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi'_a \\ \psi'_b \\ \psi'_c \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{rs} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{rr} \begin{bmatrix} i'_a \\ i'_b \\ i'_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2}L_{m1} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + (L_{rr} + \frac{3}{2}L_{m1}) \begin{bmatrix} i'_a \\ i'_b \\ i'_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第二行乘以 a , 第三行乘以 a^2 , 两边同乘 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 可得磁链矢量方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_s &= L_s \mathbf{i}_s + L_m \mathbf{i}_r \\ \boldsymbol{\psi}_r &= L_m \mathbf{i}_s + L_r \mathbf{i}_r \end{aligned}$$

当与电机绕组交链的磁通变化时, 产生的感应电动势矢量为

$$\mathbf{e} = -\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}(a^0 e_A + a e_B + a^2 e_C)$$

1.2.4 电磁转矩的矢量表达

直流电动机: $t_e = p_0 \boldsymbol{\psi}_f \times \mathbf{i}_q$

三相感应电动机: $t_e = p_0 \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s$

三相同步隐极电动机: $t_e = p_0 \boldsymbol{\psi}_f \times \mathbf{i}_s$

三相同步凸极电动机: $t_e = p_0 \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s$

1.2.5 坐标变换

磁动势等效是坐标变换的原则和基础。

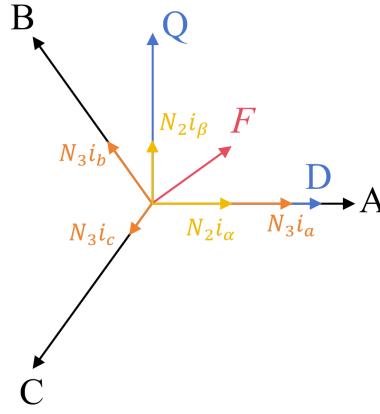


图 1.4: Clark 变换

三相静止 ABC 轴系到两相静止 DQ 轴系的变换, 称为 Clark 变换。由 $\mathbf{i}_s = i_D + j i_Q = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_A + a i_B + a^2 i_C)$ 可得

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

反变换为

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Clark 变换是一种相数变换, 只是将三相静止绕组变换为对称的两相静止绕组, 产生磁动势方式都是在静止空间对称绕组内通以时变的交流电流, 没有改变电流频率。

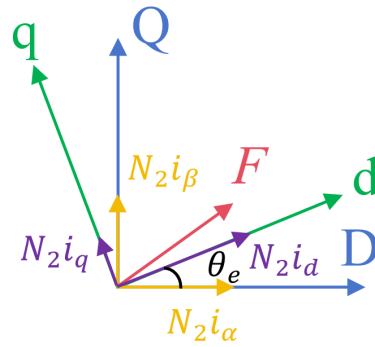


图 1.5: Park 变换

两相静止 DQ 轴系到两相同步旋转 dq 轴系的变换, 称为 Park 变换。由 $\mathbf{i}_s^{dq} = |\mathbf{i}_s|e^{j\theta_s}$ 和 $\mathbf{i}_s^{DQ} = |\mathbf{i}_s|e^{j\theta_s}$, 可得

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

其中 $\theta = \omega_s t + \theta_0$, θ_0 为 dq 轴系相对于 DQ 轴系的初始相位角。反变换为

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

Park 变换是一种频率变换，将基频交流变为直流，将倍频交流和直流变为基频交流。正是 Park 变换将交流电机等效为直流电机进行控制。

将上述两种变换合并为 Clark-Park 变换，变换关系如下

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

反变换为

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

2 三相感应电动机矢量控制

2.1 基于转子磁场定向的矢量方程

2.1.1 转矩控制

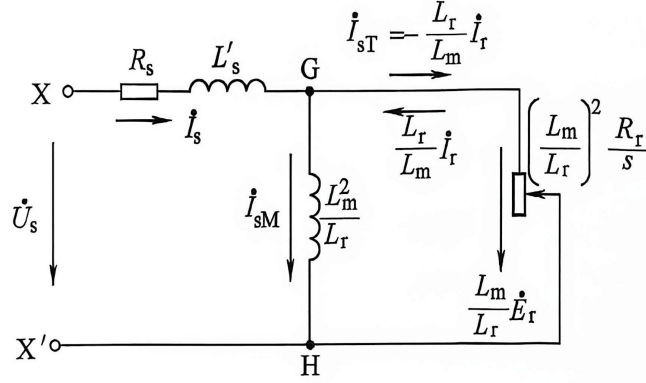


图 2.1: 三相感应电机稳态 T-I 等效电路

由 T-I 形等效电路可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{转子磁链方程: } \frac{L_m^2}{L_r} \dot{i}_{sM} = \frac{L_m^2}{L_r} (\dot{i}_s + \frac{L_r}{L_m} \dot{i}_r) = \frac{L_m}{L_r} (L_m \dot{i}_s + L_r \dot{i}_r) = \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r \Rightarrow \psi_r = L_m i_{sM} \\ \text{转子电动势方程: } \frac{L_m}{L_r} \dot{E}_r = -j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \dot{\psi}_r \Rightarrow \omega_s \psi_r = E_r \\ \text{转子电流方程: } \dot{i}_{sT} = -\frac{L_r}{L_m} \dot{i}_r \\ \text{转子电磁功率: } P_e = 3 \frac{L_m}{L_r} E_r \frac{L_r}{L_m} I_r = 3 E_r I_r = 3 \omega_s \frac{L_m}{L_r} \psi_r I_{sT} \\ \text{转子电磁转矩: } T_e = 3 p_0 \frac{L_m}{L_r} \psi_r I_{sT} = 3 p_0 \frac{L_m^2}{L_r} I_{sM} I_{sT} \\ \text{转速方程: } \omega_s \frac{L_m^2}{L_r} I_{sM} = I_{sT} \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 \frac{R_r}{s} \Rightarrow \omega_f = \frac{1}{T_r} \frac{I_{sT}}{I_{sM}}, T_r = \frac{L_r}{R_r} \end{array} \right.$$

通过将定子电流 $\dot{i}_s$ 分解成正交的纯励磁分量 $\dot{i}_{sM}$ 和纯转矩分量 $\dot{i}_{sT}$ ，就可以在转矩控制上实现解耦。

以笼型三相感应电动机为例，将转子磁场轴线定义为 M 轴，T 轴超前 M 轴 90° 电角度，且 MT 轴系随转子磁场同步旋转。转子磁场的磁链表示为 $\psi_r = \psi_g + \psi_{r\sigma} = \psi_g + L_{r\sigma} i_r$ 。转子磁场旋转速度为 ω_f 。

当转子磁场幅值恒定时，导条只能产生运动电动势，且满足 $R_B i_B = -p(\phi_{gB} + \phi_{\sigma r B}) = e_B$ ，转子各线圈相当于无漏感的转子电路，导条电流和电动势空间相位分布一致，因此转子磁动势矢量也与转子磁场轴线正交。此时转子磁场相当于他励直流电动机的励磁磁场，转子绕组相当于电枢绕组，由于转子导条产生的磁动势矢量总是与转子轴线正交，具有换向器绕组的特性，可以等效为伪静止线圈 t，此时转子电流矢量可以表示为 $(L_r/L_m) i_t$ ，完全用于产生转矩，即转子转矩电流。

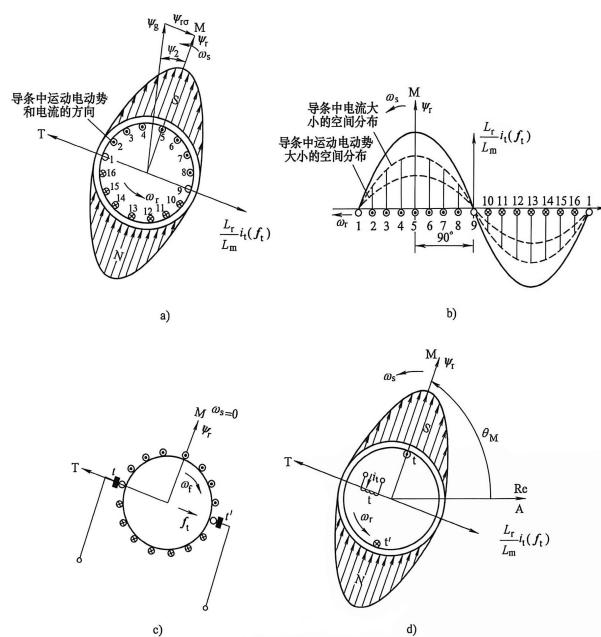


图 2-4 转子磁场幅值恒定时的转子电流矢量
 a) 由转子导条电流构成的转子磁势矢量 b) 导条中运动电动势和电流大小的空间分布
 c) 等效的换向器绕组 d) 转子 T 轴“伪静止”线圈

图 2.2: t 线圈等效分析

当转子磁场幅值变化时，各导条还会产生变压器电动势，T 轴上的导条变压器电动势最大，而 M 轴上的导条变压器电动势为 0，变压器电动势与运动电动势的空间相位相反。各导条线圈仍然是无漏感电路，导条电流和变压器电动势空间分布一致。此时绕组仍然有换向器绕组特性，等效为伪静止线圈 m，不会产生运动电动势，也不会产生电磁转矩。

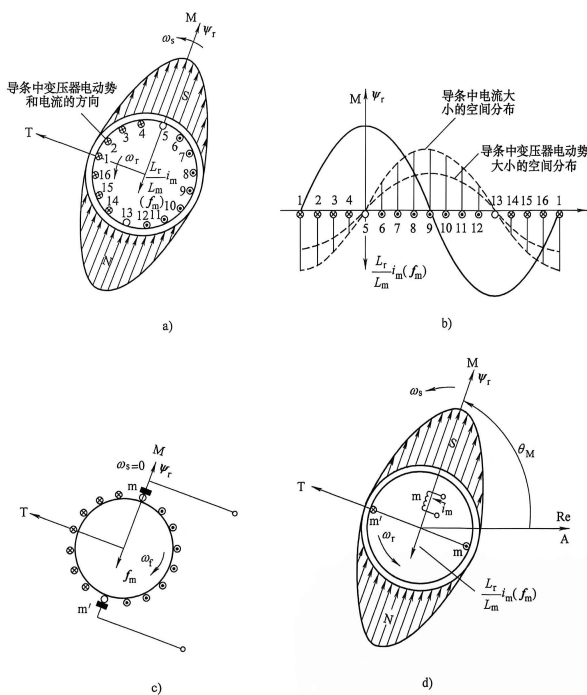


图 2-5 转子磁场幅值变化时的转子电流矢量
 a) 转子电流与转子磁势 b) 导条中变压器电动势和电流大小的空间分布
 c) 等效的换向器绕组 d) 转子 M 轴伪静止线圈 m

图 2.3: m 线圈等效分析

对于一般的动态情况,将转子绕组等效为位于 MT 轴上的两个伪静止线圈 m 和 t。此时电流有 $\mathbf{i}_s = i_M + j i_T$, 双轴线圈 m 和 t 分别产生磁动势矢量 $\mathbf{f}_M, \mathbf{f}_T$ 。令 M 轴与转子磁链矢量 ψ_r 取得一致时, i_M 才是产生磁链的励磁电流矢量, 将此称为 MT 轴系称为转子磁场定向轴系。

2.1.2 三相感应电动机的矢量方程

电压方程

对于 ABC 轴系, 定子电压方程为

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\psi_s}{dt}$$

在 abc 轴系内, 转子电压方程为

$$\mathbf{u}_r^{abc} = R_r \mathbf{i}_r^{abc} + \frac{d\psi_r^{abc}}{dt}$$

变换到 ABC 轴系有

$$\mathbf{u}_r = R_r \mathbf{i}_r + \frac{d\psi_r}{dt} - j\omega_r \psi_r$$

由磁链矢量方程可得 ABC 轴系下的电压方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} - j\omega_r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m + L_s p & L_m p \\ L_m(p - j\omega_r) & R_r + L_r(p - j\omega_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

稳态下 ψ_s, ψ_r 幅值不变, 代入定转子在 ABC 轴系下的电压方程有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= R_s \mathbf{i}_s + j\omega_s L_{s\sigma} \mathbf{i}_s + j\omega_s L_m \mathbf{i}_g \\ 0 &= \frac{R_s}{s} \mathbf{i}_r + j\omega_s L_{r\sigma} \mathbf{i}_r + j\omega_s L_m \mathbf{i}_g \end{aligned}$$

利用坐标变换 $A_s = A_s^M e^{j\theta_M}$ 以及将矢量以坐标分量展开可得 MT 轴系下电压分量的方程为

$$\begin{bmatrix} u_M \\ u_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega_s L_s & L_m p & -\omega_s L_m \\ \omega_s L_s & R_s + L_s p & \omega_s L_m & L_m p \\ L_m p & -\omega_f L_m & R_r + L_r p & -\omega_f L_r \\ \omega_f L_m & L_m p & \omega_f L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_M \\ i_T \\ i_m \\ i_t \end{bmatrix}$$

转子磁场定向的 M 轴方向与 ψ_r 一致, 则 $\psi_t = 0$, 此即为转子磁场定向控制 (RFOC) 的约束条件。此时电压方程为

$$\begin{bmatrix} u_M \\ u_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega_s L_s & L_m p & -\omega_s L_m \\ \omega_s L_s & R_s + L_s p & \omega_s L_m & L_m p \\ L_m p & 0 & R_r + L_r p & 0 \\ \omega_f L_m & 0 & \omega_f L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_M \\ i_T \\ i_m \\ i_t \end{bmatrix}$$

消去了 $-\omega_f \psi_t$ 和 $p\psi_t$ 两项, 转子线圈 m 和 t 之间不再有磁耦合。

稳态下 $p\psi_s^M = p\psi_r^M = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s^M &= R_s \mathbf{i}_s^M + j\omega_s (L_s - \frac{L_m^2}{L_r}) \mathbf{i}_s^M + j\omega_s \frac{L_m^2}{L_r} i_M \\ 0 &= \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 \frac{R_s}{s} \left(\frac{L_r}{L_m} \mathbf{i}_r \right) + j\omega_s \frac{L_m^2}{L_r} i_M \end{aligned}$$

等效电路图如下所示, 与 ABC 轴系中用定子绕组时间相量表示的等效电路形式上完全相同。

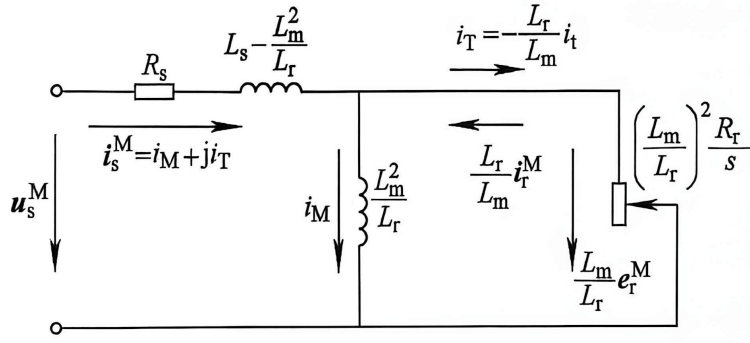


图 2.4: MT 轴系下三相感应电机等效模型

电流方程

由 $R_r i_m + p\psi_r = 0$ 可得

$$i_m = -\frac{p\psi_r}{R_r}$$

再由 $\psi_m = L_m i_M + L_r i_m$ 可得

$$\psi_r = L_m \frac{i_M}{1 + T_r p}$$

等效励磁电流为

$$i_{mr} = \frac{\psi_r}{L_m} = i_M + \frac{L_r}{L_m} i_m = i_M + (1 + \sigma_r) i_m$$

其中, $\sigma = \frac{L_r \sigma}{L_m}$ 为转子漏磁系数。

由于 $\psi_t = 0$, 则有

$$i_T = -\frac{L_r}{L_m} i_t$$

此方程与正弦稳态方程相对应, 反映了磁动势平衡, 即转子电流的磁动势必须被定子电流所平衡。

动态时, 由 $R_r i_t + \omega_f \psi_r = 0$ 有

$$i_t = -\frac{1}{R_r} \psi_r \omega_f$$

则定子电流转矩分量为

$$i_T = \frac{T_r}{L_m} \psi_r \omega_f$$

定子电流励磁分量为

$$i_M = \frac{1}{L_m} (1 + T_r p) \psi_r = (1 + T_r p) i_{mr}$$

转矩方程

由于电磁转矩不会随轴系改变而改变, 因此将矢量直接换成 MT 轴系下即可得 MT 轴系下的电磁转矩方程为

$$t_e = -p_0 \psi_r^M \times i_r^M = p_0 (\psi_t i_m - \psi_m i_t)$$

将磁动势平衡方程、磁链方程和定子励磁分量方程分别代入可得

$$t_e = p_0 \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_T = p_0 \frac{L_m^2}{L_r} \left(\frac{i_m}{1 + T_r p} \right) i_T = p_0 \frac{L_m^2}{L_r} i_{mr} i_T$$

此三个方程是满足磁场定向约束下的电磁转矩方程, 在转子磁链变化的动态过程也适用, 又称转矩动态方程, 作为基于转子磁场定向的转矩控制方程。

转速方程

不同变量表示的转速方程如下

$$\omega_f = \frac{1}{T_r} \frac{L_m}{\psi_r} i_T = \frac{1}{T_r} \frac{i_T}{i_{mr}} = \frac{1}{p_0} \frac{L_r}{T_r} \frac{1}{\psi_r^2} t_e = p_0 \frac{T_r}{L_r} \psi_r^2 \omega_f$$

2.2 转子磁场定向的矢量控制

磁场定向分为直接磁场定向和间接磁场定向，直接磁场定向通过磁场检测或运算来确定转子磁链矢量的空间位置，通常是通过一定运算估计出转子磁链矢量，又称磁链观测法。间接磁场定向通过控制转差频率实现，又称转差频率法。

2.2.1 直接磁场定向

电压-电流模型

由 ABC 轴系的定子电压矢量方程得

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \sigma L_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_r}{dt}$$

以 DQ 轴系分量表示为

$$\begin{aligned} \psi_D &= \frac{L_r}{L_m p} [u_D - (R_s + \sigma L_s p) i_D] \\ \psi_Q &= \frac{L_r}{L_m p} [u_Q - (R_s + \sigma L_s p) i_Q] \end{aligned}$$

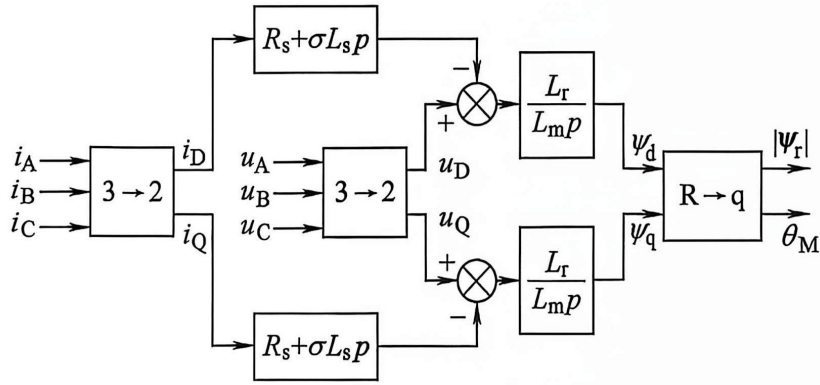


图 2.5: 电压电流模型

低速时，定子电压较小，若定子电阻值不准确，定子电阻压降的偏差对积分的影响会增大。积分器会有温漂问题和非完全线性频率响应问题。

电流-转速模型

由 ABC 轴系转子电压矢量方程得

$$T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r = L_m \mathbf{i}_s + j\omega_r T_r \psi_r$$

以 DQ 轴系分量表示为

$$\psi_D = \frac{1}{T_r p + 1} [L_m i_D - \omega_r T_r \psi_Q]$$

$$\psi_Q = \frac{1}{T_r p + 1} [L_m i_Q + \omega_r T_r \psi_d]$$

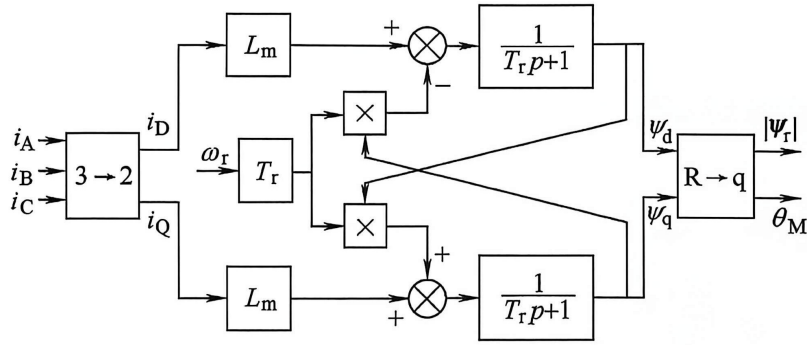


图 2.6: ABC 轴系下电流转速模型

以 MT 轴系分量表示为

$$T_r \frac{d|i_{mr}|}{dt} + |i_{mr}| = i_M$$

$$\omega_s = \omega_r + \frac{1}{T_r} \frac{i_T}{i_{mr}}$$

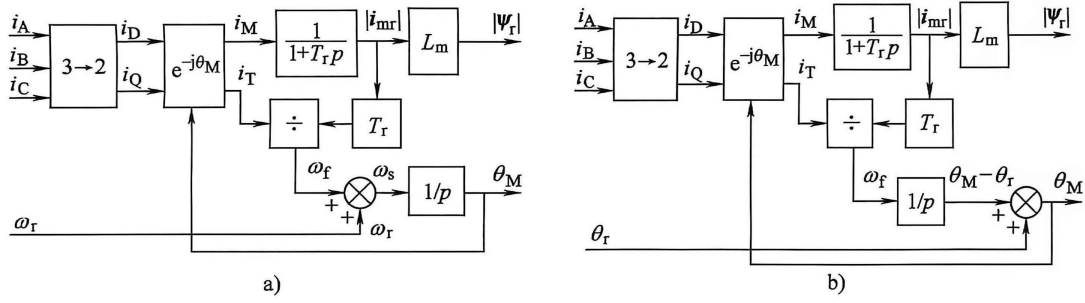


图 2.7: MT 轴系下电流转速模型

结果依赖转子时间常数 T_r ，时间常数存在偏差则导致磁场定向不准，引起 MT 轴系不必要的耦合。告诉运行时，时间常数存在偏差容易引起磁通振荡。

因此，在中高速采用电压-电流模型，而在低速采用电流-转速模型。不论是哪种模型，都是按照给定的模型获取 ψ_r 的信息，而现实的参数是不断变化的，将影响转子磁链观测的准确度，从控制理论的观点看，直接磁场定向并没有利用转子磁链输出误差构成负反馈，只是一种运算模型。

2.2.2 间接磁场定向

转子磁链取决于指令值 ψ_r^* ，磁场定向下 $\psi_r^* = L_m i_{mr}^*$ ，因此一般将 i_{mr}^* 作为控制转子磁链的指令值。

由于

$$i_M^* = (1 + T_r p) i_{mr}^*$$

因此将 i_M^* 作为电动机的输入量，可以控制定子电流矢量的励磁分量。

由于

$$i_T = \frac{1}{p_0} \frac{L_r}{L_m^2} \frac{t_e^*}{i_{mr}^*}$$

因此将 i_T^* 作为电动机的输入量，可以控制定子电流矢量的转矩分量。

由于

$$\omega_f^* = \frac{1}{T_r} \frac{i_T^*}{i_{mr}^*} = \frac{1}{T_r} \left(\frac{1 + T_r p}{i_M^*} \right) i_T^*$$

$$i_s^* = \sqrt{i_T^{*2} + i_M^{*2}}$$

因此给定 i_M^*, i_T^* ，唯一确定了 ω_f^*, i_s^* ；反之由 ω_f^*, i_s^* 唯一决定 i_M^*, i_T^* 。当满足 $\omega_f = \omega_f^*, i_s = i_s^*$ 时，一定有 $i_M = i_M^*, i_T = i_T^*$ ，即实现了磁场定向。间接磁场定向通过转差频率控制实现定向，又称转差频率法。这是由于转速满足

$$\omega_f^* = \frac{1}{T_r} \frac{i_T^*}{i_M^*} = \frac{1}{T_r} \tan \theta_\delta^*$$

即转差频率控制了定子电流在 MT 轴系中的相位，因此实现了磁场定向。

2.2.3 基于转子磁场定向的伺服系统

定子电压解耦控制

由 MT 轴系内定子电压方程

$$\mathbf{u}_s^M = R_s \mathbf{i}_s^M + L_s \frac{d\mathbf{i}_s^M}{dt} + L_m \frac{d\mathbf{i}_r^M}{dt} + j\omega_s L_s \mathbf{i}_s^M + j\omega_s L_m \mathbf{i}_r^M$$

由于式中含有不可测量的 $\mathbf{i}_r^M$ ，由磁场定向后 MT 轴系下的磁链方程

$$\mathbf{i}_r^M = \frac{L_m}{L_r} (|\mathbf{i}_{mr}| - \mathbf{i}_s^M)$$

代入后表示为分量形式为

$$\sigma T_s \frac{di_M}{dt} + i_M = \frac{u_M}{R_s} + \omega_s \sigma T_s i_T - (1 - \sigma) T_s \frac{d|\mathbf{i}_{mr}|}{dt}$$

$$\sigma T_s \frac{di_T}{dt} + i_T = \frac{u_T}{R_s} - \omega_s \sigma T_s i_M - (1 - \sigma) T_s \omega_s |\mathbf{i}_{mr}|$$

即在定子电压作用下，三相感应电动机的定子电流响应为一阶惯性环节。

由于两方程是耦合的，下面需要进行解耦。假设 $|\mathbf{i}_{mr}| = \text{Const}$ ，将分量式改写为

$$\sigma L_s \frac{di_M}{dt} + R_s i_M - \omega_s \sigma L_s i_T = u_M$$

$$\sigma L_s \frac{di_T}{dt} + R_s i_T + \omega_s \sigma L_s i_M + (1 - \sigma) L_s \omega_s |\mathbf{i}_{mr}| = u_T$$

控制直轴和交轴电流的两轴电压为

$$\hat{u}_M = \sigma L_s \frac{di_M}{dt} + R_s i_M$$

$$\hat{u}_T = \sigma L_s \frac{di_T}{dt} + R_s i_T$$

耦合项为

$$u_{PM} = -\omega_s \sigma L_s i_T$$

$$u_{PT} = \omega_s \sigma L_s i_M + (1 - \sigma) L_s \omega_s |\mathbf{i}_{mr}|$$

将耦合项叠加到电流调节器的输出端，则有

$$u_M = \hat{u}_M + u_{PM}$$

$$u_T = \hat{u}_T + u_{PT}$$

电压源逆变器供电的伺服系统

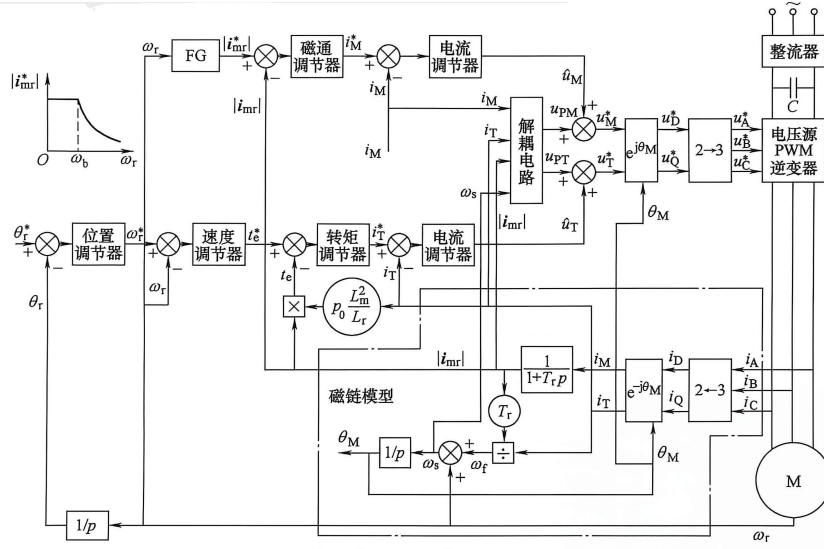


图 2.8: 电压源逆变器供电的直接磁场定向伺服系统

磁场直接定向采用转速和定子电流为输入的电-流-速模型。经过位置、速度、转矩、电流四级调节器得到转矩电压 $\hat{u}_T$ 。FG 的输出经过磁通和电流两极调节器得到励磁电压 $\hat{u}_M$ 。通过解耦电路叠加得到实际的控制电压，再经过坐标变换输入逆变器控制电机。

由于 $|i_{mr}|$ 受限于磁路最大可达饱和程度，随着转速增加，定子电压增大，当增加到某一值时，定子电压达到逆变器输出的最大电压，此时转速为基速，若继续提高转速，则需要减小励磁电流，进行弱磁控制。等效励磁电流参考值 $|i_{mr}^*|$ 由函数发生器 FG 给出，当转速小于基速时，FG 输出恒定，此时以最大转矩输出，称为恒转矩运行；当转速大于基速时，电流随转速增大反比例减小，输出功率不变，称为恒功率运行。

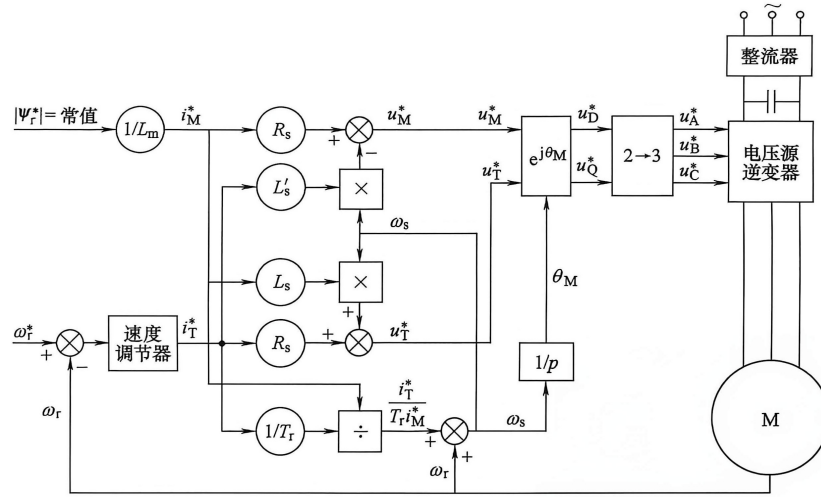


图 2.9: 电压源逆变器供电的间接磁场定向伺服系统

电路去除了弱磁控制功能，令转子磁链给定值 ψ_r^* 不变，得到 M 轴电流给定值。转速经过速度调节器得到 T 轴电流给定值。由于转速表达式为

$$\omega_s = \omega_r + \frac{i_T^*}{T_r i_M^*}$$

因此采用了间接磁场定向。解耦电路部分根据 MT 轴系下的电压分量微分方程设计，在 $\sigma L_s \ll L_m$ 的情况下，忽略了 $\sigma L_s di_T^*/dt$ 项。

电流可控电压源逆变器馈电的伺服系统

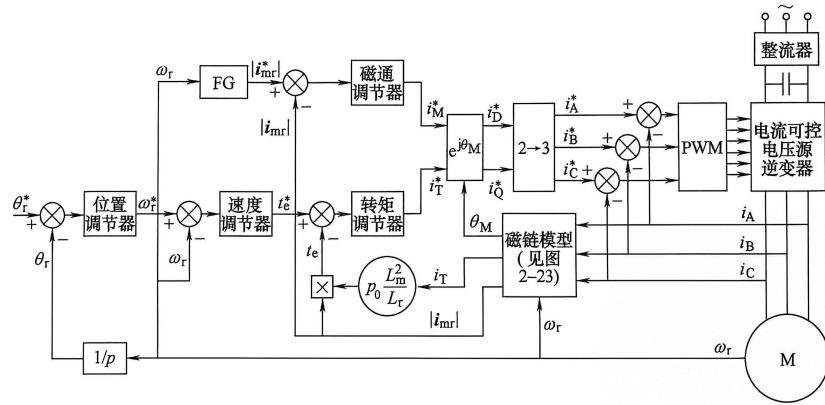


图 2.10: 电流可控电压源逆变器馈电的直接磁场定向伺服系统

电流可控电压源逆变器馈电的直接磁场定向伺服系统与电压源逆变器馈电的直接磁场定向伺服系统结构和控制方式类似，主要区别是采用快速电流环控制，无需电流调节器，也不存在电压解耦问题，可以直接控制 i_M, i_T 来控制定子三相电流。

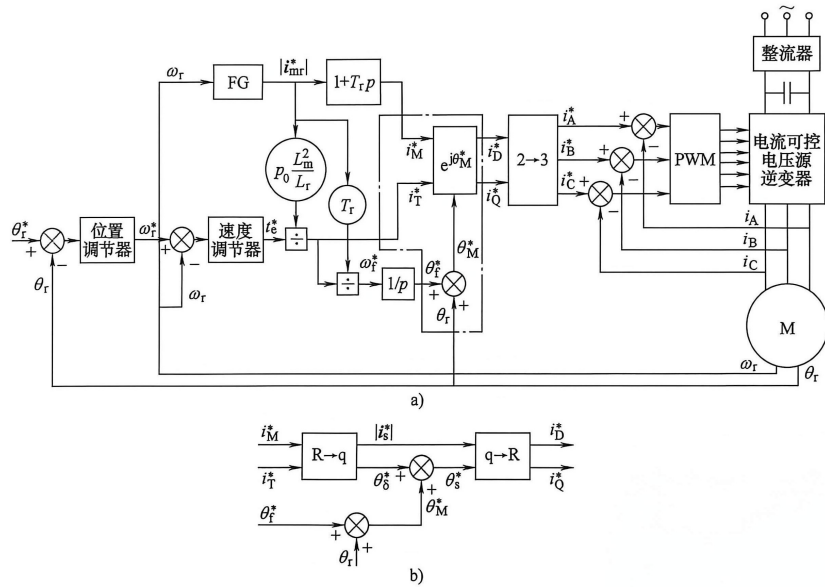


图 2.11: 电流可控电压源逆变器馈电的间接磁场定向伺服系统

结构同样类似电压源逆变器馈电的控制系统，由于将 $e^{j\theta_M^*}$ 作为旋转轴系变换因子，因此满足转差频率约束，同时对定子电流的闭环控制又满足了电流矢量幅值约束，因此满足了间接磁场定向约束，此时不需要磁链观测器估计转子磁链矢量，提高了系统快速响应能力，但无法对转矩反馈控制，系统控制的准度和动态特性更依赖于定向准确性。

2.2.4 电流控制模式

对于电流可控电压源逆变器，电流控制环节位于静止 ABC 轴系，控制的是实际的三相交流电流，电流可控 PWM 逆变器相当于交流电流控制器。

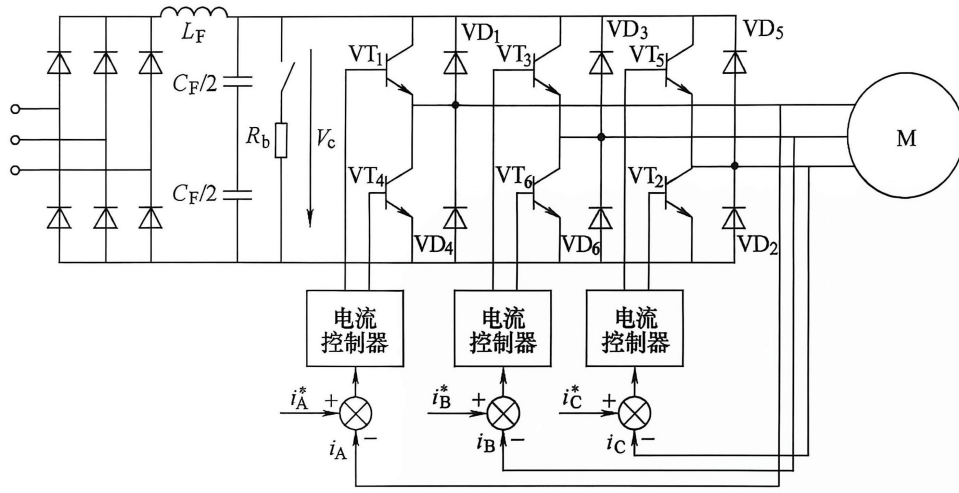


图 2.12: 电流可控电压源 PWM 逆变器

定义每个桥臂的开关函数为 S_A, S_B, S_C ，上桥臂导通，下桥臂关断时 $S = 1$ ；下桥臂导通，上桥臂关断时 $S = 0$ 。三对电子开关的通断组合可以构成 8 种开关状态。八个开关状态对应了八个开关电压矢量，其中六个为非零矢量，两个为零矢量。六个非零矢量将空间划分为六个空间。六个非零矢量为

$$\mathbf{u}_{sk} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_c e^{j(k-1)\frac{\pi}{3}} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

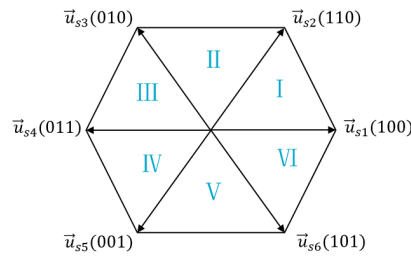


图 2.13: 矢量空间

对逆变器的每一个桥臂，都采用电流滞环控制，滞环宽度为 $2h = 2\Delta i_{A\max}$ 。当电流偏差 $\Delta i_A = i_A^* - i_A$ 为正且超过 $\Delta i_{A\max}$ 时，上桥臂关断，下桥臂导通，电流开始下降。当电流偏差为负且超过 $-\Delta i_{A\max}$ 时，下桥臂关断，上桥臂导通，电流开始上升。上下桥臂反复通断，使得电流在滞环宽度 $2h$ 内锯齿状地不停跟踪给定电流波形。

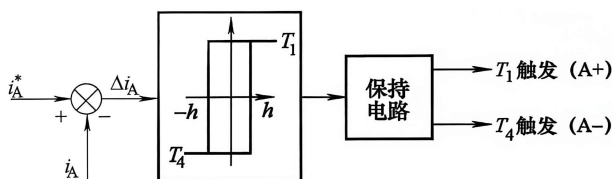


图 2.14: 单桥臂滞环控制框图

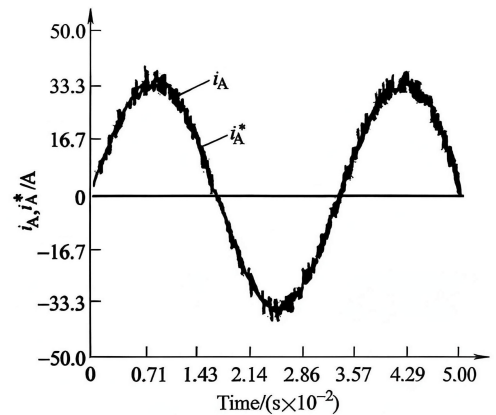


图 2.15: 滞环控制单相电流波形

由于定子电流矢量 i_s^* 在 A 轴方向上的投影为

$$\Re(i_s^*) = \Re\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(i_A + ai_B + a^2i_c)\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}i_A^*$$

由于 A 相电流 Δi_A 被限制在 $2h$ 内, 则 Δi_s 被限制在 $2h'$ 内。因此 A 相开关线 +A 和 -A 相距 $2h'$, 其中宽度 $h' = \sqrt{\frac{3}{2}}h$ 。同理画出 B 相和 C 相开关线。在 3 个滞环比较器作用下, 偏差 Δi_s^* 将被限定于三相开关线构成的内六边形内。

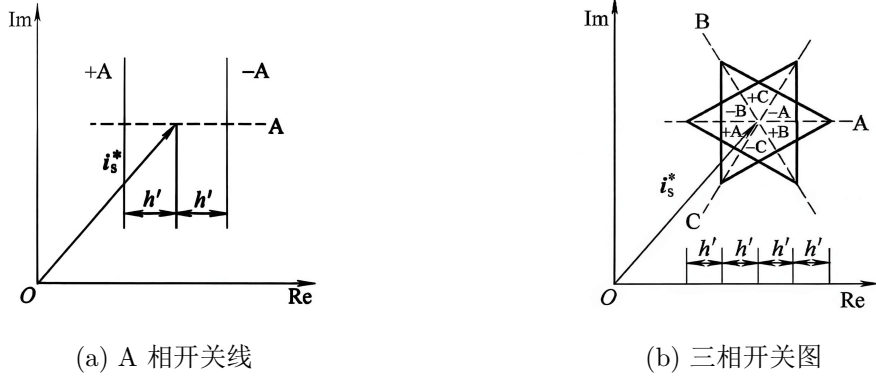


图 2.16: 滞环控制开关图

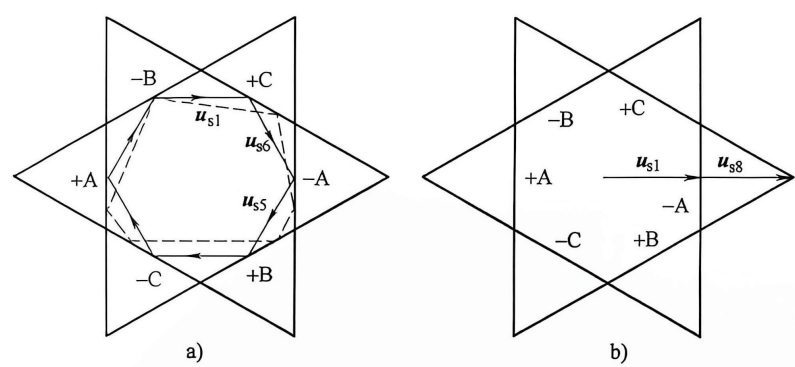
不计定子电阻和感应电动势的影响时, 定子电流矢量的偏差为

$$\Delta i_s = \frac{1}{\sigma L_s} u_s \Delta t$$

上式表明, 定子电流矢量偏差方向与开关电压矢量相同, 变化率决定于开关电压矢量幅值和定子瞬态电感。

在开关图中, 定子电流矢量会沿着开关电压矢量方向移动直至碰到开关线, 切换开关电压矢量, 六个开关电压矢量会不断重复作用将电流限制在内六边形内。若考虑定子电阻和感应电动势, 则 i_s 变化方向不再与 u_s 一致, 变化速率也随转子速度变化而变化, 此时运动轨迹具有不确定性, 开关频率不固定。

实际电机控制时, 电流偏差有时会超过带宽, 这时出现了零电压矢量。例如, 当 u_{s1} 作用使得 i_s 与 A 相开关线相遇, 开关电压矢量转换为 u_{s8} , 电动机处于空转状态, 在感应电动势的作用下, A 相电流偏差进一步增大, 直到电流矢量轨迹碰到另一开关线时, 开关电压矢量才会再次转换。当电流矢量轨迹与两开关线交点相遇时, 电流偏差将达到最大值 $2h$ 。



a) 非零开关电压矢量作用 b) 零开关电压矢量作用
实线 - 定子电阻和感应电动势为零
虚线 - 定子电阻和感应电动势不为零

图 2.17: 定子电流矢量变化轨迹

滞环比较器和电压源逆变器构成了快速电流控制环，相当于一个高增量的 P 调节器。滞环比较器通过控制开关电压矢量的转换，迫使实际电流快速跟踪参考电流，基本消除电流跟踪的延迟和之后，很大程度上消除了定子瞬态电感和感应电动势对电流动态过程的影响，相当于对电机方程进行了降阶处理。

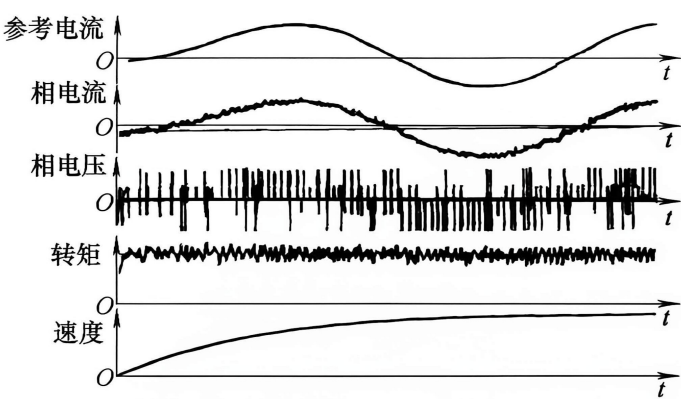


图 2.18: 滞环控制下的运动曲线

为保证快速跟踪，定子电压需要有较大冗余度，增大了逆变器容量的需求。此外滞环控制会产生一定的幅值偏差和高次谐波，增加损耗。低速运行时可能产生冲击电流。

除滞环比较控制外，还可以采用斜坡比较控制和预测电流控制等控制方式。斜坡比较控制可以预置开关频率，但控制较复杂。预测电流控制可以减小开关频率，提高快速响应能力，但计算复杂，对软件要求高。

2.3 双馈感应电机矢量控制

与笼型感应电机不同，绕线式感应电机可在定转子双边馈电下运行，转子绕组通过集电环与变换器相接，变换器通过变压器与电网相接。通过控制变换器可以实现对双馈感应电机的运行控制。

2.3.1 基于定子磁场定向的矢量控制

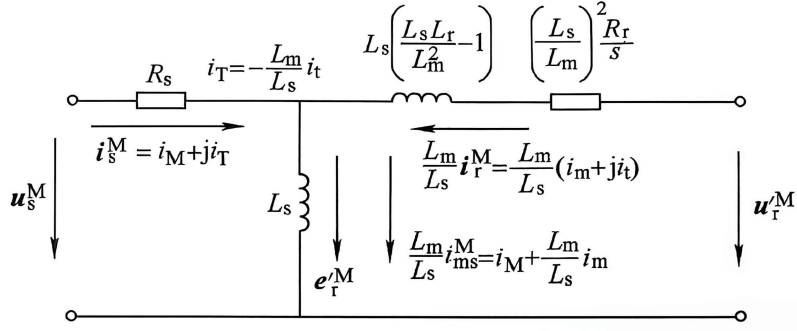


图 2.19: 双馈感应电机定子磁场定向稳态等效电路

电压电流方程

定义定子等效励磁电流矢量 i_{ms} 满足 $\psi_s^M = L_m i_{ms}$ ，M 轴与 i_{ms} 方向一致时，MT 轴系沿定子磁场定向。电压电流矢量形式为

$$\begin{aligned} u_s^M &= R_s i_s^M + L_m \frac{di_{ms}}{dt} + j\omega_s L_m i_{ms} \\ i_{ms} &= \frac{L_s}{L_m} i_s^M + i_r^M \end{aligned}$$

电流的分量形式为

$$\begin{aligned} i_{ms} &= \frac{L_s}{L_m} i_M + i_m \\ i_T &= -\frac{L_m}{L_s} i_t \end{aligned}$$

这与笼型感应电机的矢量方程一致。但是双馈电机的转子电流是由转子电动势和外施电压共同决定的，通过控制外加电压即可控制转子电流励磁分量。

将电压方程中的定子电流换成转子电流得

$$u_s^M = \frac{R_s L_m}{L_s} (i_{ms} - i_r^M) + L_m \frac{di_{ms}}{dt} + j\omega_s L_m i_{ms}$$

转子电压矢量方程为

$$u_r^M = R_r i_r^M + \sigma L_r \frac{di_r^M}{dt} + \frac{L_m^2}{L_s} \frac{di_{ms}}{dt} + j\omega_f \left(\frac{L_m^2}{L_s} i_{ms} + \sigma L_r i_r^M \right)$$

其中 $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ 为漏磁系数， $\omega_f = \omega_s - \omega_r$ 为转差角速度。

双馈电机定子磁场定向的定子电压方程与笼型感应电机转子磁场定向的转子电压方程形式上相似，从电路拓扑结构上看，相当于两者的定转子进行了置换，双馈电机的定子绕组相当于无漏感纯电阻电路，而转子电路由于漏感存在产生了耦合，使得转子电压方程存在耦合。

稳态矢量方程为

$$\begin{aligned} u_s^M &= R_s i_s^M - e_s^M \\ u_r^M &= R_r i_r^M + j\omega_f \sigma L_r i_r^M - e_r^M \end{aligned}$$

其中感生电动势矢量 $e_s^M = -j\omega_s L_m i_{ms}^M$ ， $e_r^M = -j\omega_f \frac{L_m^2}{L_s} i_{ms}^M$

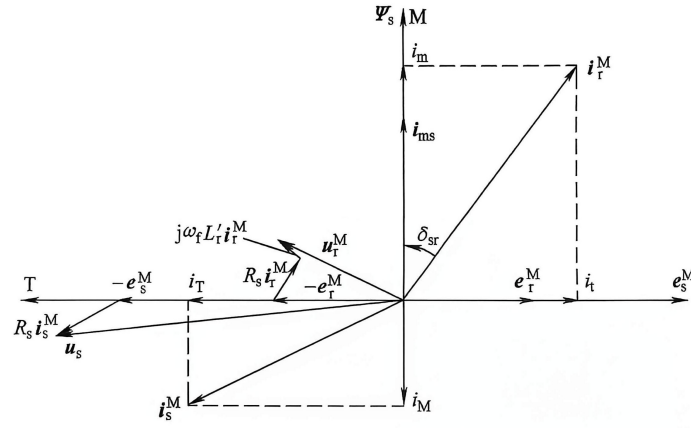


图 2.20: 双馈感应电机稳态矢量图

功率方程

输入定子的电功率为

$$P_s = \Re(\mathbf{u}_s \bar{\mathbf{i}}_s) = R_s i_s^2 + \Re\left(\frac{d\psi_s}{dt} \bar{\mathbf{i}}_s\right) + \Re(j\omega_s \psi_s \bar{\mathbf{i}}_s) = P_{cus} + P_{ms} + P_{es}$$

其中 P_{cus} 为定子铜耗, P_{ms} 为磁能变化引起的电功率, 稳态时为零, P_{es} 为机电能量转换功率, 即电磁功率。

输入转子的电功率为

$$P_r = \Re(\mathbf{u}_r \bar{\mathbf{i}}_r) = R_r i_r^2 + \Re\left(\frac{d\psi_r}{dt} \bar{\mathbf{i}}_r\right) + \Re(j\omega_f \psi_r \bar{\mathbf{i}}_r) = P_{wr} + P_{mr} + P_{er}$$

其中 P_{wr} 为转子铜耗, P_{mr} 为磁能变化引起的电功率, P_{er} 为电磁功率。

定转子的电磁功率分别为

$$P_{es} = \Re(j\omega_s \psi_s \bar{\mathbf{i}}_s) = \omega_s (\psi_M i_T - \psi_T i_M) = \omega_s L_m (i_T i_m - i_M i_t)$$

$$P_{er} = \Re(j\omega_f \psi_r \bar{\mathbf{i}}_r) = \omega_f (\psi_M i_t - \psi_t i_m) = -\omega_f L_m (i_T i_m - i_M i_t)$$

因此电磁功率满足

$$P_{er} = -s P_{es}$$

稳态运行时, 若忽略定转子电阻, 有 $P_s = P_{es}$, $P_r = P_{er}$, 则 $P_r = -s P_s$, 总电磁功率 $P_e = P_{er} + P_{es} = (1 - s) P_{es}$, 总有功功率 $P_1 = P_s + P_r = (1 - s) P_s$

若不考虑磁场变化引起的无功功率, 则定子的无功功率为

$$Q_s = \Im(\mathbf{u}_s \bar{\mathbf{i}}_s) = \Im(j\omega_s \psi_s \bar{\mathbf{i}}_s) = \omega_s \psi_s i_M = \omega_s L_m i_{ms} i_M$$

定子的有功功率为

$$P_{es} = \omega_s \psi_s i_T = \omega_s L_m i_{ms} i_T$$

可以通过控制定子电流转矩分量 i_T 来控制定子有功功率, 控制定子电流励磁分量 i_M 来控制定子无功功率。

对 i_M, i_T 的控制只能通过控制 i_m, i_t 实现, 因此功率又可以表示为

$$P_e = (1 - s) P_{es} = -(1 - s) \omega_s \frac{L_m^2}{L_s} i_{ms} i_t$$

$$Q_s = \frac{\omega_s L_m^2}{L_s} i_{ms} (i_{ms} - i_m)$$

2.3.2 矢量控制的运行状态

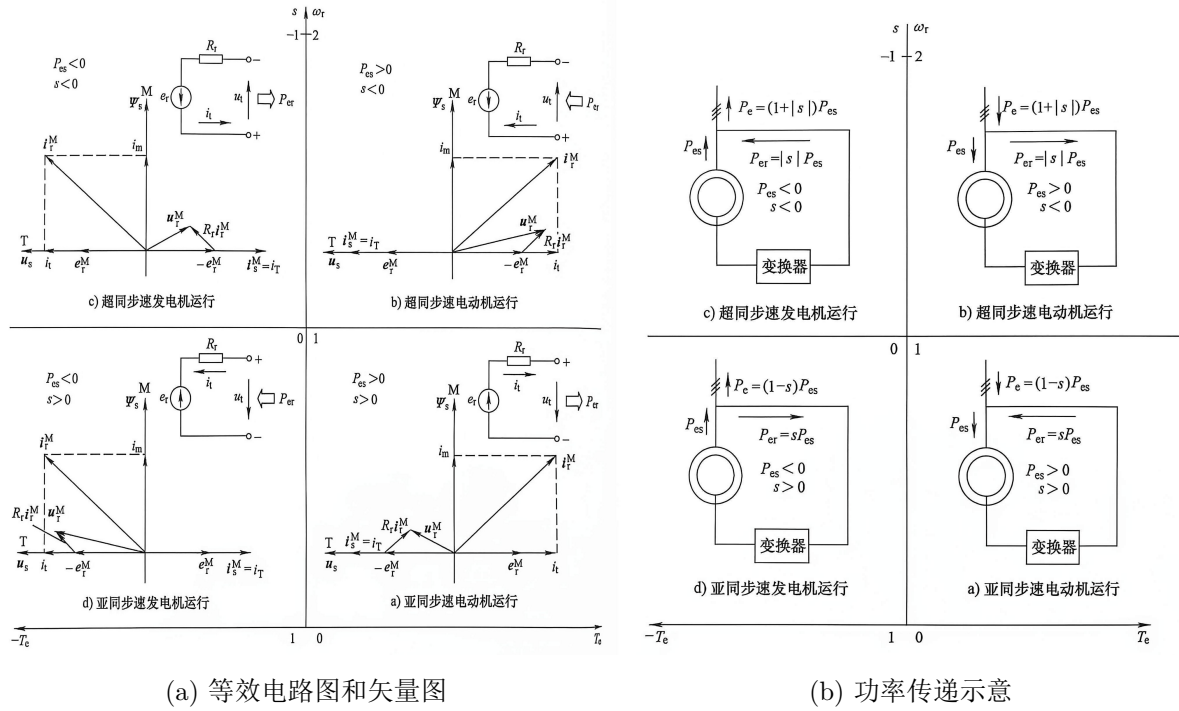


图 2.21: 双馈感应电机的四象限运行

传统的串级调速可以看成是定子恒压恒频供电下的转子变频调速，属于时域内标量控制，只能控制转子电流幅值，无法控制转子电流相位，也无法控制功率因数。矢量控制实质是对转子电流矢量幅值和相位的控制，可以实现对有功和无功的解耦控制。

运行在亚同步速电动机状态时，定子有功功率为 $P_e = \omega_s \frac{1}{L_s} \psi_s \psi_f \sin \delta_{sr}$ ，其中 δ_{sr} 为转子励磁磁场 ψ_f 与定子磁场 ψ_s 的电角度，称为负载角。此时转矩为

$$t_e = p_0 \frac{1}{L_s} \psi_s \psi_f \sin \delta_{sr} = p_0 \frac{1}{L_s} \psi_r \times \psi_s$$

转子励磁磁场是由转子三相交流电流产生的，稳态下，相当于转子单轴绕组中通入了恒定的直流，此时可以将双馈感应电机等同于一台电励磁隐极同步电机。当 $s = 0$ 时，双馈感应电机的转子绕组相当于同步电机的直流励磁绕组。双馈感应电机的转矩公式也是同步电机的转矩公式。双馈电机最显著的特点是接于电网时可以通过调节励磁调节无功和功率因数，这是电机转子独立励磁的结果。对于笼型感应电机和永磁同步电机来说，驱动装置容量必须和电机功率相匹配，而双馈感应电机由于变换器容量仅为电机功率的一部分，因此适用于大功率、有限调速场合。

2.3.3 矢量控制系统

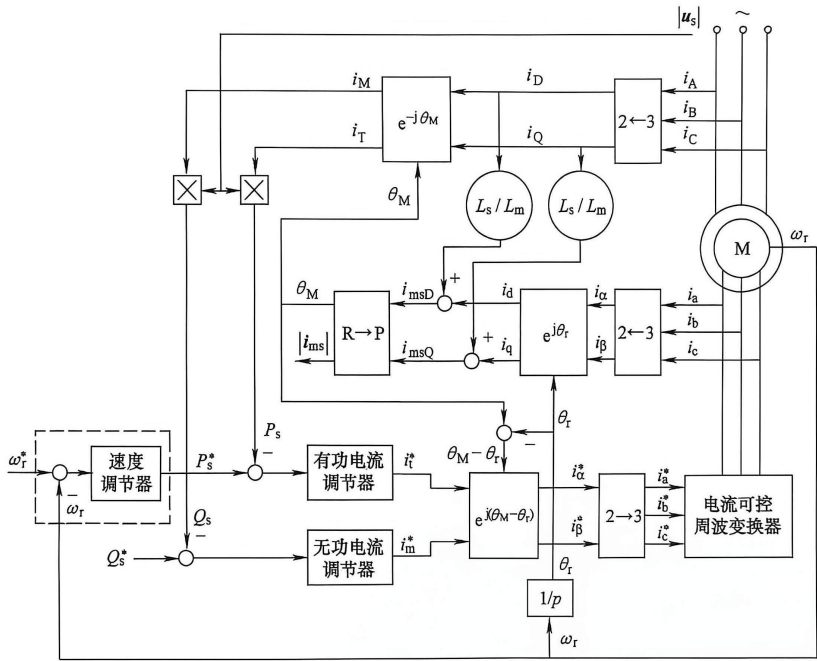


图 2.22: 由电流型交-交变换器馈电的矢量控制系统

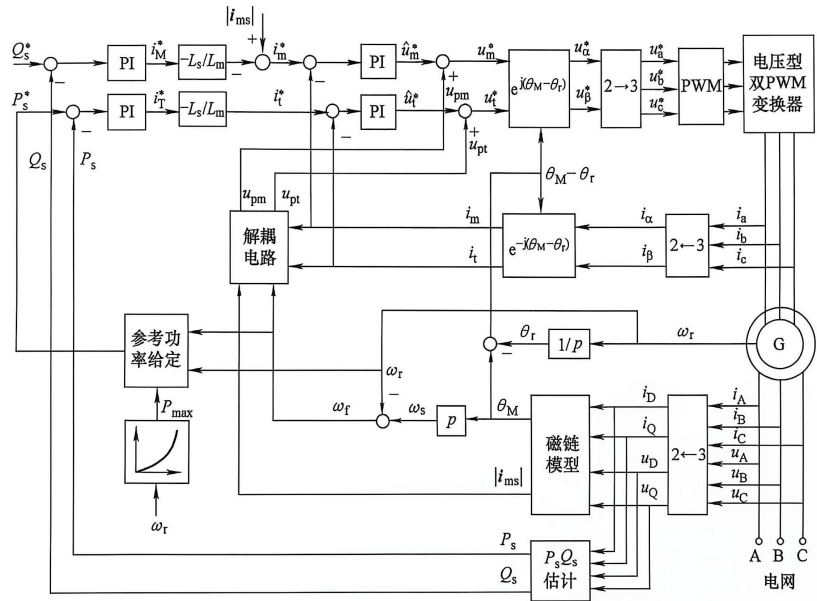


图 2.23: 由电压型交-直-交变换器馈电的矢量控制系统

3 三相永磁同步电动机矢量控制

3.1 基于转子磁场定向的矢量方程

3.1.1 永磁同步电动机的结构和模型

永磁同步电动机（Permanent Magnet Synchronous Motor, PMSM）由电励磁三相同步电动机发展而来。用永磁体代替了电励磁系统，省去了励磁绕组、集电环和电刷，定子与电励磁三相同步电动机基本相同。矢量控制要求永磁励磁磁场在气隙中为正弦分布，稳态时能产生正弦波感应电动势。

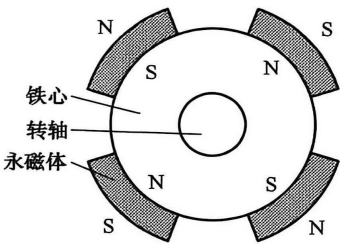


图 3-1 面装式转子结构

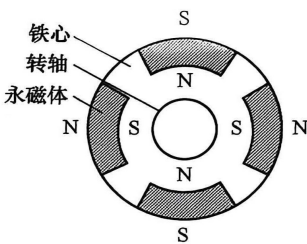


图 3-2 插入式转子结构

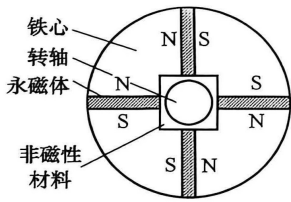


图 3-3 内装式转子结构

图 3.1: 永磁同步电动机的转子结构

按照永磁体安装形式，PMSM 的转子结构有面装式、插入式和内装式三种。永磁体的材料主要有铁氧体、稀土钴和钕铁硼三类，后两类合称稀土永磁材料，永磁同步电机主要采用稀土永磁。

建立数学模型作如下假设：

- 1. 忽略定转子铁心磁阻，不计涡流和磁滞损耗
- 2. 永磁材料的电导率为零，永磁体内部磁导率与空气相同
- 3. 转子上没有阻尼绕组
- 4. 永磁体产生的励磁磁场和三相绕组产生的电枢反应磁场在气隙中均为正弦分布
- 5. 稳态运行时，相绕组中感应电动势波形为正弦波

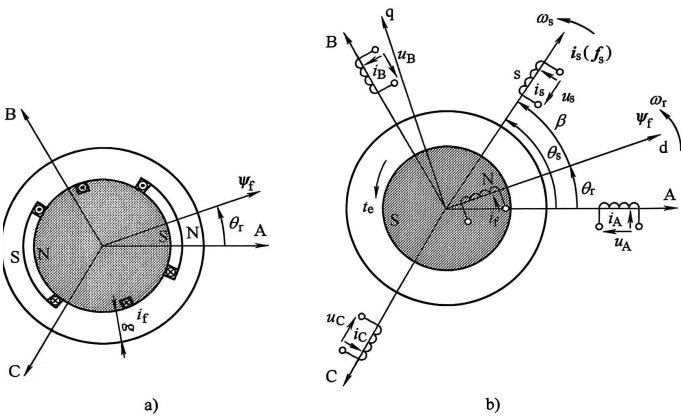


图 3-6 二极面装式 PMSM 物理模型
a) 转子等效励磁绕组 b) 物理模型

图 3.2: 二极面装式的物理模型

对于面装式转子结构, 由于永磁体内部磁导率很小, 将置于转子表面的永磁体等效为两个空心励磁线圈, 进一步等效为转子槽内的励磁绕组。对定子三相绕组而言, 电动机气隙是均匀的, 长度为 g , 因此等效为一台电励磁三相隐极同步电动机。

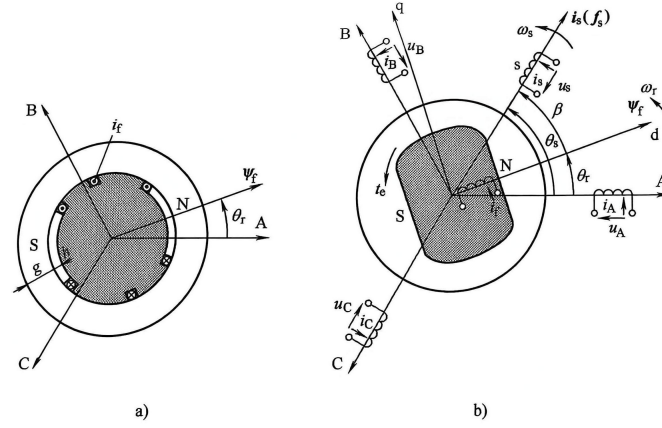


图 3-7 二极插入式 PMSM 的等效物理模型
a) 转子等效励磁绕组 b) 物理模型

图 3.3: 二极插入式的物理模型

对于插入式转子结构, 也可以等效为转子槽内的励磁绕组, 但由于电动机气隙不再是均匀的, 面对转子铁心部分长度为 g , 面对永磁体部分长度增大为 $g + h$, 其中 h 为永磁体高度。因此 d 轴方向上的磁阻要大于 q 轴方向上的磁阻, 直轴电枢反应若于交轴电枢反应, $L_{md} < L_{mq}$ 。可以等效为一台直轴电感小于交轴电感的电励磁三相凸极同步电动机。

而对于内装式转子结构, 直轴磁导小于交轴磁导, $L_{md} < L_{mq}$, 与插入式转子结构类似。

3.1.2 面装式永磁同步电动机的矢量方程

面装式电动机气隙均匀, 因此自感和互感均与位置无关, 为常值

$$L_A = L_B = L_C = L_{s\sigma} + L_{m1}$$

$$L_{AB} = L_{BA} = L_{AC} = L_{CA} = L_{BC} = L_{CB} = L_{m1} \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} L_{m1}$$

其中, $L_{s\sigma}$ 和 L_{m1} 分别为相绕组的漏电感和励磁电感。

磁链方程为

$$\psi_s = L_{s\sigma} \mathbf{i}_s + L_m \mathbf{i}_s + \psi_f = L_s \mathbf{i}_s + \psi_f$$

定子电压方程为

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\psi_s}{dt} = R_s \mathbf{i}_s + j\omega_s L_s \mathbf{i}_s + j\omega_r \psi_f$$

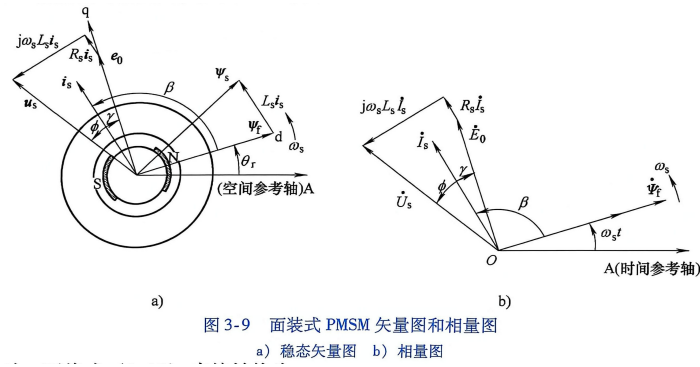


图 3.4: 面装式的矢量图与相量图

电磁转矩为

$$t_e = p_0 \psi_f \times i_s = p_0 \psi_f i_s \sin \beta$$

当 ψ_f, i_s 幅值恒定时，电磁转矩仅与 β 角有关。

正弦稳态情况下，电磁功率为

$$P_e = 3E_0 I_s \cos \gamma = 3\omega_s L_m I_f I_s \sin \beta$$

电磁转矩为

$$T_e = 3p_0 L_m I_f I_s \sin \beta = p_0 \psi_f i_s \sin \beta = p_0 \psi_f \times i_s$$

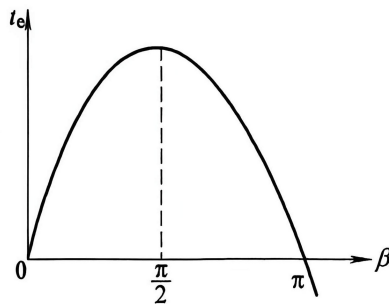


图 3.5: 面装式矩角曲线

因此转矩矢量控制中，控制的是定子电流矢量的幅值 $|i_s|$ 和相对于永磁励磁磁场 ψ_f 的空间相位角 β ；在正弦稳态下，即控制定子电流相量的幅值 $|\dot{I}_s|$ 和相对于励磁磁场 $\dot{\psi}_f$ 的相间相位角 β 。

3.1.3 插入式永磁同步电动机的矢量方程

插入式转子结构的气隙不均匀，在相同幅值的 i_s 作用下，由于空间相位角 β 的不同，产生的电枢反应磁场不同，等效励磁电感不再是常值，随 β 变化而变化。参照电机学中采用双反应理论分析凸极同步电动机问题，插入式永磁同步电动机也可以用双反应理论分析。

将单轴线圈 S 分解为双轴线圈 d 和 q，相当于将定子电流矢量分解

$$i_s = i_d + j i_q$$

分别产生的电枢反应磁场为

$$\psi_{md} = L_{md} i_d \quad \psi_{mq} = L_{mq} i_q$$

其中 L_{md}, L_{mq} 分别为直轴和交轴等效励磁电感, 且 $L_{md} < L_{mq}$ 。于是定子磁链矢量为

$$\psi_s^{dq} = \psi_d + j\psi_q = L_d i_d + \psi_f + jL_q i_q$$

其中, 直轴同步电感 $L_d = L_{s\sigma} + L_{md}$, 交轴同步电感 $L_q = L_{s\sigma} + L_{mq}$

dq 轴系的电压矢量方程为

$$u_s^{dq} = R_s i_s^{dq} + \frac{d\psi_s^{dq}}{dt} + j\omega_r \psi_s^{dq}$$

其中, 由于 $L_{mf} = L_{md}$, 可将永磁励磁磁场表示为 $\psi_f = L_{mf} i_f = L_{md} i_f$ 。

电压分量方程为

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_r L_q i_q \\ u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_r L_d i_d + e_0 \end{aligned}$$

其中感应电动势 $e_0 = \omega_r \psi_f$

稳态时, 电压矢量方程为

$$u_s = R_s i_s + j\omega_s L_d i_d - \omega_s L_q i_q + e_0$$

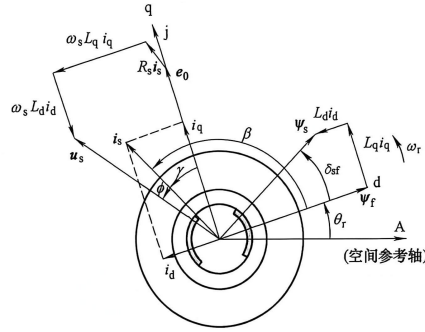


图 3-14 插入式和内装式 PMSM 稳态矢量图

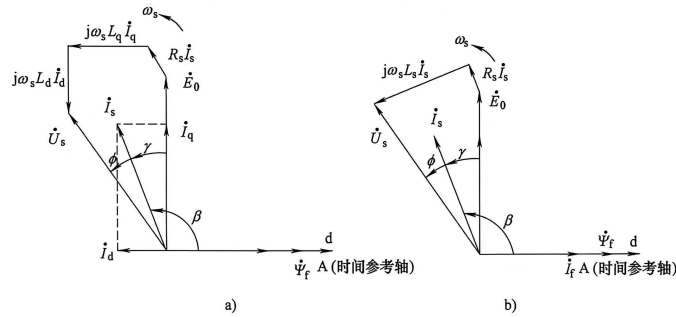


图 3-15 PMSM 相量图

a) 插入式和内装式 PMSM b) 面装式 PMSM

图 3.6: 插入式的矢量图与相量图

电磁转矩表达式为

$$t_e = p_0 \left[\psi_f i_s \sin \beta + \frac{1}{2} (L_d - L_q) i_s^2 \sin 2\beta \right] = p_0 \psi_s \times i_s$$

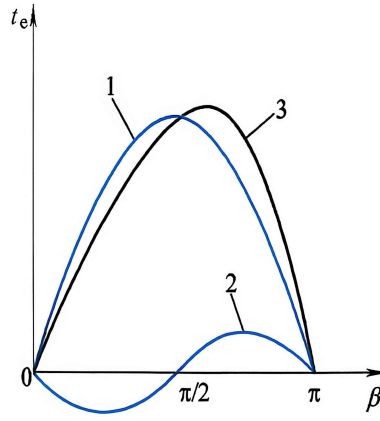


图 3.7: 插入式矩角曲线

对于插入式永磁同步电动机，令 $L_d = L_q = L_s$ ，即可得到面装式永磁同步电动机的对应方程。

3.2 基于转子磁场定向的矢量控制系统

3.2.1 面装式永磁同步电动机的矢量控制

由转矩矢量表达式 $t_e = p_0 \psi_f i_s \sin \beta = p_0 \psi_f i_q$ 可知，决定电磁转矩的是定子电流 q 轴分量，称为转矩电流。若控制 $\beta = 90^\circ$ ，则 i_s 与 ψ_f 在空间内正交， $i_s = j i_q$ ，定子电流全部为转矩电流，此时可将面装式 PMSM 等效为他励直流电动机。q 轴线圈等效为电枢绕组，电刷置于几何中性线上，交轴电流 i_q 等效为他励直流电动机的电枢电流。

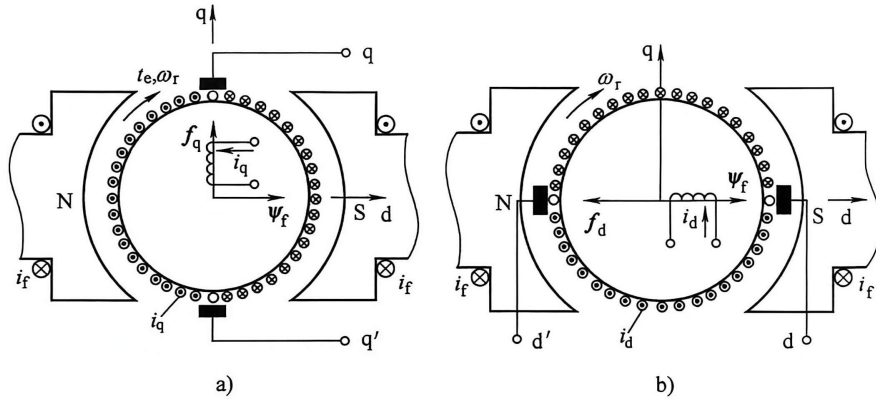
a) $i_q > 0, i_d = 0$ b) $i_q = 0, i_d < 0$

图 3.8: PMSM 等效他励直流电动机

由于 PMSM 的转子励磁无法调节，若 $i_d < 0$ ，则直轴电枢磁场与永磁励磁磁场方向相反，可使直轴磁场减小，此时 $\omega_s L_d i_d$ 作用是减小 u_s 的幅值。因此，应控制 $\beta < 90^\circ$ ，使定子电流矢量产生去磁分量 i_d 。此时直轴线圈等效为电刷位于 d 轴上的电枢绕组。

PMSM 的坐标变换与三相感应电动机相同，Clark-Park 正变换为

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix}$$

反变换为

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

面装式 PMSM 只需要将定子绕组变换为换向器绕组，由于转子磁极可观测，通过传感器可以观测磁场轴线位置，不受参数变化影响。矢量控制在 dq 轴系内，通过对定子电流控制实现对电磁转矩的控制，机电能量转换在定子中完成，转矩控制可以直接在定子侧实现。

定子电流矢量在 ABC 轴系中为

$$\mathbf{i}_s = |\mathbf{i}_s| e^{j(\theta_r + \beta)}$$

其中 β 由矢量控制决定， θ_r 是实际检测值。定子电流矢量（即电枢反应磁场轴线）在 ABC 轴系中相位由转子自身位置决定，是自控式控制。在稳态和动态情况下都能严格控制 β 。而传统的变频调速采用的 V/f 控制只能控制电枢反应磁场自身的幅值和旋转速度，不能控制 β ，实质是一种标量控制。

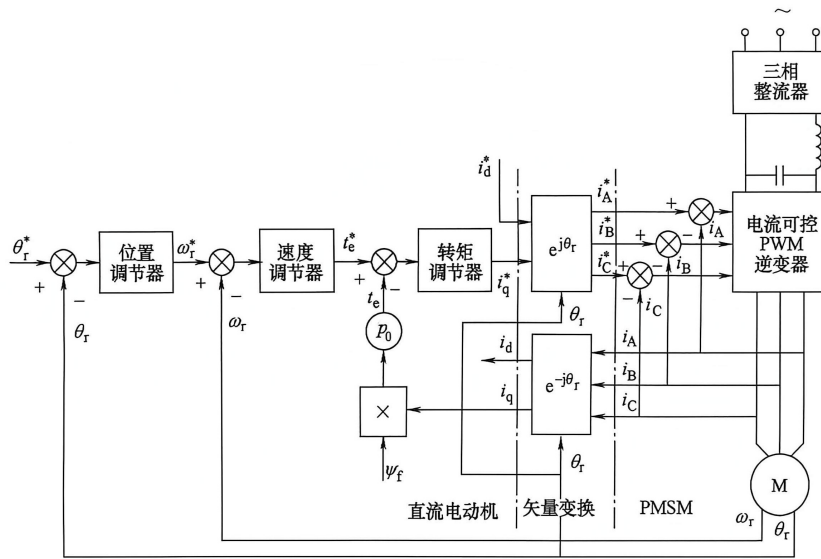


图 3.9: 面装式的矢量控制系统

3.2.2 插入式永磁同步电机的矢量控制

插入式和内装式 PMSM 将永磁体嵌入或内装在转子铁心内，在结构上增强了可靠性，可提高运行速度；能够有效利用磁阻转矩，提高转矩/电流比；可降低永磁体励磁刺痛，减小永磁体体积，既有利于弱磁运行，扩展速度范围，又能降低成本。

将转矩方程标么值化得

$$t_{en} = i_{qn}(1 - i_{dn})$$

其中各标么值为

$$t_{eb} = p_0 \psi_f i_b$$

$$i_b = \frac{\psi_f}{L_q - L_d}$$

在电动机结构确定后，电磁转矩的大小决定于定子电流的两个分量，但对于每一个 t_{en} ，有无数个 i_{qn} 和 i_{dn} 的组合与之对应，需要确定两个电流分量的匹配原则，即定子电流的优化控制问题。

当电动机转速在基速以下时，工作在恒转矩运行区，此时铜耗占比较大，按转矩/电流比最大的原则来控制定子电流，这样可以降低电动机的铜耗和逆变器与整流器的损耗，降低系统总损耗。

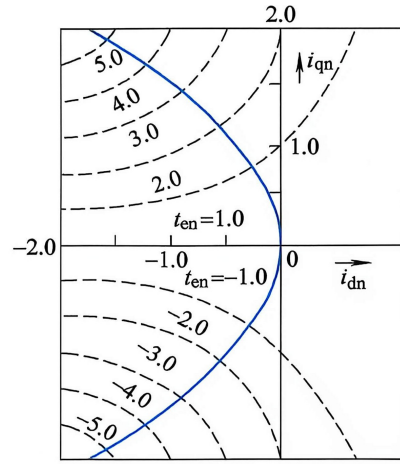


图 3.10: 最大转矩-电流比曲线

对每一转矩值, 有不同组合的 i_{dn} 和 i_{qn} , 在 $i_{dn} - i_{qn}$ 平面内的虚线即为恒转矩曲线, 每条恒转矩曲线上有一点与原点最近, 此即为最小定子电流。两电流分量与转矩的关系为

$$t_{en} = \sqrt{i_{dn}(i_{dn} - 1)^3} = \frac{i_{qn}}{2}(1 + \sqrt{1 + 4i_{qn}^2})$$

忽略电阻压降, 电压矢量幅值为

$$|\mathbf{u}_s|^2 = (\omega_r \psi_f + \omega_r L_d i_d)^2 + (\omega_r L_q i_q)^2 \leq |\mathbf{u}_s|_{\max}^2$$

空载情况下, 忽略空载电流则有 $\omega_r \psi_f = e_0 = |\mathbf{u}_s|$, 定义空载电动势 e_0 达到 $|\mathbf{u}_s|_{\max}$ 的转速为速度基值

$$\omega_{rb} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\psi_f} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{L_m f i_f}$$

恒转矩运行区运行时, 定子电压达到极限值的转子速度为转折速度, 对于面装式 PMSM 有

$$\omega_{rt} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\sqrt{(L_m f i_f)^2 + (L_s i_s)^2}}$$

对于插入式和内装式 PMSM 有

$$\omega_{rt} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\sqrt{(L_m f i_f + L_d i_d)^2 + (L_q i_q)^2}}$$

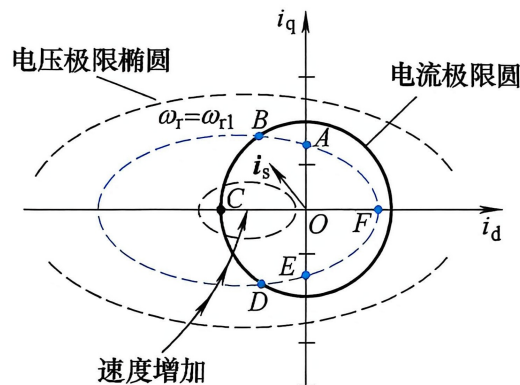


图 3.11: 电压极限椭圆和电流极限圆

电压满足

$$(e_0 + x_d i_d)^2 + (\rho x_d i_q)^2 = \left(\frac{|u_s|}{\omega_r} \right)^2 \leq \left(\frac{|u_s|_{\max}}{\omega_r} \right)^2$$

其中, $e_0 = \frac{\omega_{rn} \psi_f}{u_{sn}}$, $x_d = \omega_{rn} L_d \frac{i_{sn}}{u_{sn}}$, $x_q = \omega_{rn} L_q \frac{i_{sn}}{u_{sn}}$, $\rho = \frac{x_q}{x_d}$ 为凸极系数, 面装式 $\rho = 1$, 插入式和内装式 $\rho > 1$

电流满足

$$|i_s|^2 = i_d^2 + i_q^2 \leq i_{s\max}^2$$

电压极限方程构成电压极限椭圆, 电流极限方程构成电流极限圆, 定子电流矢量一定要落在电压极限椭圆和电流极限圆内。

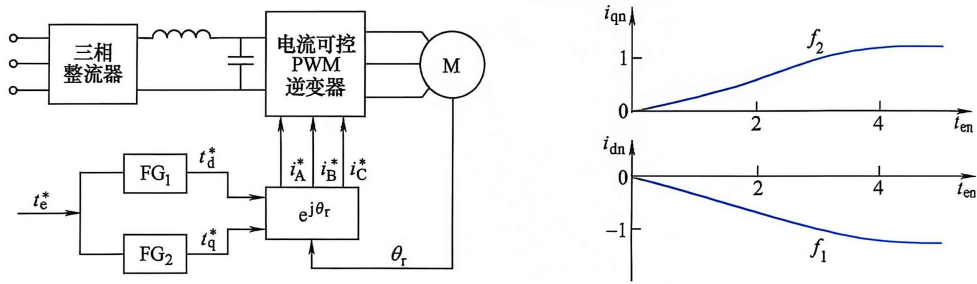
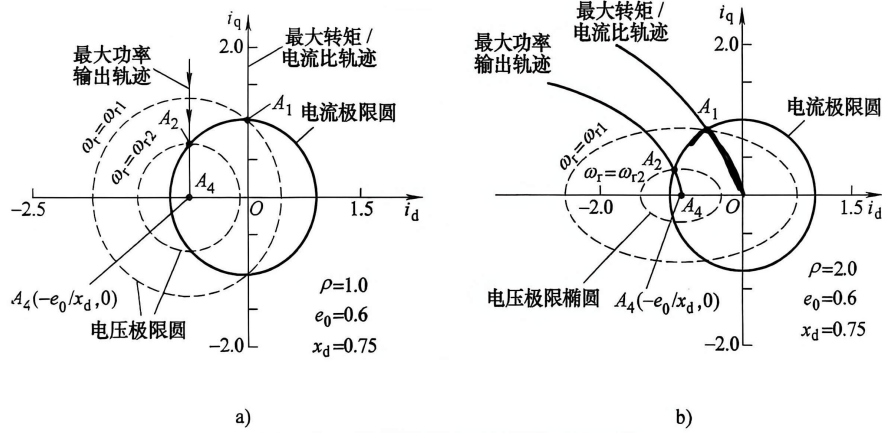


图 3.12: 插入式矢量控制

3.2.3 定子电流最优控制



a) 面装式 b) 内装式

图 3.13: 定子电流最优控制

最大转矩/电流比控制

以标么值形式表示转矩有

$$t_e = p_0 [e_0 i_q + (1 - \rho) x_d i_d i_q] = p_0 [e_0 i_s \sin \beta + \frac{1}{2} (1 - \rho) x_d i_s^2 \sin 2\beta]$$

对转矩表达式求极值得空间相位

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left[\frac{-e_0 + \sqrt{e_0^2 + 8(\rho - 1)^2 x_d^2 i_s^2}}{4(\rho - 1) x_d i_s} \right] \quad \rho \neq 1$$

而面装式 $\rho = 1$ ，此时空间相位应取 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 此时电流满足

$$i_d = |\mathbf{i}_s| \cos \beta \quad i_q = |\mathbf{i}_s| \sin \beta$$

则 A1 点的转折速度为

$$\omega_{rt} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\sqrt{(e_0 + x_d i_{s\max} \cos \beta)^2 + (\rho x_d i_{s\max} \sin \beta)^2}}$$

对面装式则为

$$\omega_{rt} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\sqrt{e_0^2 + (x_d i_{s\max})^2}}$$

弱磁控制

最大转矩/电流比轨迹和电流极限圆相交于 A1 点。通过该点的电压极限椭圆对应的速度即为电动机可以达到的最大速度，此时电压极限方程分量为

$$u_q|_{\max} = \omega_{r1}(L_d i_d + \psi_f)$$

$$u_d|_{\max} = -\omega_{r1} L_q i_q$$

动态电压方程为

$$L_d \frac{di_d}{dt} = u_d|_{\max} + \omega_{r1} L_q i_q = 0$$

$$L_q \frac{di_q}{dt} = u_q|_{\max} - \omega_{r1}(L_d i_d + \psi_f) = 0$$

此时电流调节器处于饱和状态，控制系统丧失了对定子电流的控制能力。此时，电流矢量 $\mathbf{i}_s$ 会脱离 A1 点左右摆动。在 A1 点控制交轴分量 i_q 减小，直轴分量 i_d 增大，则定子电流将向左摆动，定子电压减小，调节器脱离饱和状态，系统恢复对定子的控制功能。随着 i_q 的减小，转子的速度范围扩展。如果在弱磁过程中，保持定子电流为额定值，则定子电流矢量轨迹沿圆周由 A1 点移动至 A2 点。控制 $\beta = 180^\circ$ 时，定子电流全部为直轴去磁电流，此时转折频率最大为

$$\omega_{r\max} = \frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{e_0 + x_d i_d}$$

当 $e_0 + x_d i_d = 0$ 时，电动机速度会增至无穷大，对应椭圆原点 A4，但是受 $L_{md} i_f + L_d i_d = 0$ 约束，而一般而言 $L_{md} \approx L_d$ ， i_f 较大， i_d 不会太大，实际运行不会达到此工作点。

最大功率输出控制

以标么值形式表示功率有

$$P_e = \omega_r [e_0 i_q + (1 - \rho) x_d i_d i_q]$$

对功率表达式求最值，结合电压极限方程，电流矢量的分量为

$$i_d = -\frac{e_0}{x_d} - \Delta i_d$$

$$i_q = \frac{\sqrt{\left(\frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\omega_r}\right)^2 + (x_d \Delta i_d)^2}}{\rho x_d}$$

其中，对于面装式， $\rho = 1$ ， $\Delta i_d = 0$ ，对于插入式和内装式

$$\Delta i_d = \frac{-\rho e_0 + \sqrt{(\rho e_0)^2 + 8(\rho - 1) \left(\frac{|\mathbf{u}_s|_{\max}}{\omega_r}\right)^2}}{4(\rho - 1)x_d}$$

最大功率输出轨迹与电压极限椭圆交点为 A2, 该点的速度为 ω_{r2} , 这是在电压极限约束下, 电动机能以最大功率输出的最低速度, 当转速低于 ω_{r2} 时, 电流矢量轨迹与电压极限椭圆交点落在电流极限圆外无法达到。

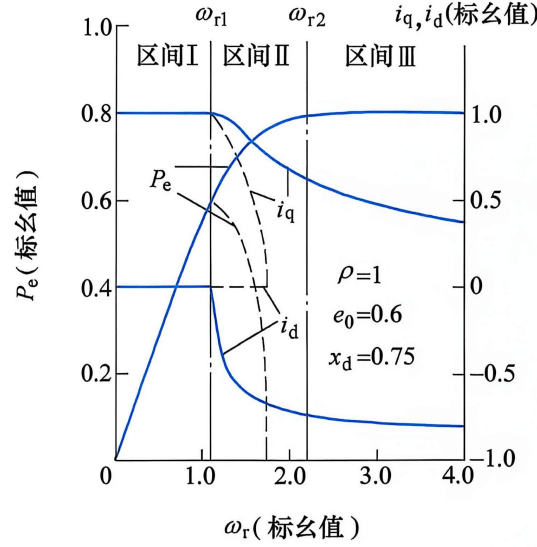


图 3.14: 定子电流最优控制的功率输出曲线

3.2.4 谐波转矩和转速波动

谐波分析时假定:

1. 不考虑永磁体和转子的阻尼效应
2. 转子励磁磁场对称分布
3. 定子电流不含偶次谐波

定子为 Y 形联结且无中性线, 则定子相电流不含 3 次和 3 的倍数次谐波, 在基于转子磁场矢量控制中, 控制 $\beta = 90^\circ$ 时, 定子电流基波和感应电动势基波同相位, 则 A 相电磁功率为

$$p_{eA} = e_A(t)i_A(t) = P_0 + P_2 \cos 2\omega_r t + P_4 \cos 4\omega_r t + P_6 \cos 6\omega_r t + \dots$$

电动机电磁转矩为

$$t_e = \frac{1}{\Omega_r} (p_{eA} + p_{eB} + p_{eC}) = T_0 + T_6 \cos 6\omega_r t + T_{12} \cos 12\omega_r t + T_{18} \cos 18\omega_r t + \dots$$

其中转矩系数为

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_6 \\ T_{12} \\ T_{18} \end{bmatrix} = \frac{3}{2\Omega_r} \begin{bmatrix} E_{m1} & E_{m5} & E_{m7} & E_{m11} \\ E_{m7} - E_{m5} & E_{m11} - E_{m1} & E_{m13} + E_{m1} & E_{m17} + E_{m5} \\ E_{m13} - E_{m11} & E_{m17} - E_{m7} & E_{m19} - E_{m5} & E_{m23} - E_{m1} \\ E_{m19} - E_{m17} & E_{m23} - E_{m13} & E_{m25} - E_{m11} & E_{m29} - E_{m7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m5} \\ I_{m7} \\ I_{m11} \end{bmatrix}$$

次数相同的感应电动势和电流谐波作用后产生平均转矩, 不同次数谐波电动势和电流作用产生脉动频率为基波频率 6 倍次的谐波转矩。定义转矩脉动系数 k_R 来定量描述转矩脉动程度

$$k_R = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}$$

定子 k 次谐波电流产生的 γ 次谐波磁动势波为 $f_{sk} = F_{sk} \sin(k\omega_r t \pm \gamma\theta_s)$, 旋转磁动势波的速度和方向为 $\omega_{rk} = \pm \frac{k}{\gamma} \omega_r$, $+$ 表示与基波磁动势旋转方向相同, $-$ 表示与基波磁动势旋转方向相反。

两个谐波次数不同的旋转磁场相互作用不会产生电磁转矩, 只有次数相同的谐波磁场相互作用才会产生电磁转矩, 若转速相同, 产生平均转矩, 否则产生平均值为零的脉动转矩。

如果 ε 为转子永磁励磁磁场的谐波次数, 只有在 $\varepsilon = \gamma$ 条件下才会产生转矩, 此转矩的脉动频率为

$$\omega_{\gamma\varepsilon} = \gamma \left[\omega_r - \left(\pm \frac{k}{\gamma} \omega_r \right) \right] = (\gamma \mp k) \omega_r$$

转矩可以表示为

$$T_e = \sum_{\gamma=k} T_{\gamma k} \pm \sum_{\gamma \neq k} T_{\gamma k} \cos(\gamma \mp k) \omega_r t$$

其中, $\gamma = k$ 时产生平均转矩, $(\gamma - k)$ 为 6 的整数倍时取正值, $(\gamma + k)$ 为 6 的整数倍时取负值, 都产生谐波转矩。

由于定子谐波磁场幅值决定于谐波电流幅值, 转子谐波磁场幅值决定了感应电动势谐波分量的幅值, 因此可以表示为

$$T_e = \frac{3}{2\Omega_r} \left[\sum_{\varepsilon=k} E_{m\varepsilon} I_{mk} \pm \sum_{\varepsilon \neq k} E_{m\varepsilon} I_{mk} \cos(\varepsilon \mp k) \omega_r t \right] = T_{ev} \pm \sum T_{ek}$$

谐波转矩作用下, 转速会产生波动, 将实际转速表示为

$$\Omega_r = \Omega_{rv} + \sum \Omega_{rk}$$

代入电动机机械方程, 忽略 $R_\Omega \sum \Omega_{rk}$ 项, 则有

$$\sum \Omega_{rk} = \frac{1}{J} \int \sum T_{ek} dt$$

实际转速方程为

$$\Omega_r = \Omega_{rv} \pm \frac{3}{2} \frac{1}{J p_0} \frac{1}{\Omega_r^2} \sum_{\varepsilon \neq k} \frac{1}{(\varepsilon \mp k)} E_{m\varepsilon} I_{mk} \sin(\varepsilon \mp k) \omega_r t$$

对于由感应电动势和电流波形畸变引起的纹波转矩, 可以通过改变永磁体的形状等方法来使得磁场尽可能为正弦分布, 可以采用短距和分布绕组削弱或消除低次谐波电动势。也可以在控制层面通过向参考电流注入谐波电流消除对应谐波转矩。

对于次数满足 $\gamma_z = \frac{Z}{p_0} \pm 1$ 的齿谐波产生的齿槽转矩, 采用定子斜槽或者转子斜极可以削弱或消除齿槽转矩, 由于永磁体难以加工, 可以采用多块永磁体连续移位的措施达到定子斜极的效果。

4 直接转矩控制

矢量控制是将定子电流作为控制变量，需要先进行磁场定向，通过矢量变换将定子电流的励磁分量和转矩分量变换为三相电流。直接转矩控制将定子磁链和转矩作为控制变量，无需进行磁场定向、矢量变换和电流控制，更为简捷快速，进一步提高了系统的动态响应能力。

4.1 直接转矩控制原理

4.1.1 控制原理

三相感应电动机的电磁转矩生成

对于三相感应电动机，定子电流矢量为

$$\mathbf{i}_s = \frac{\psi_s}{L'_s} - \frac{L_m}{L'_s L_r} \psi_r$$

其中 $L'_s = \sigma L_s = L_s - L_m^2/L_r$ 为定子瞬态电感， $\sigma = 1 - L_m^2/L_s L_r$

代入电磁转矩表达式则有

$$t_e = p_0 \frac{L_m}{L'_s L_r} |\psi_s| |\psi_r| \sin \delta_{sr}$$

其中 $\delta_{sr} = \rho_s - \rho_r$ 为负载角， ρ_s, ρ_r 分别为定子磁链和转子磁链矢量相对于 A 轴的空间电角度。

保持 $|\psi_s|$ 和 $|\psi_r|$ 不变，且 δ_{sr} 一般较小，通过调节负载角可以有效控制电磁转矩，这就是三相感应电动机直接转矩控制的基本原理。

将定子电流矢量代入电压矢量方程有

$$T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \left(\frac{1}{\sigma} - j\omega_r T_r \right) \psi_r = \frac{L_m}{L'_s} \psi_s$$

因此转子磁链矢量 ψ_r 总是滞后定子磁链矢量 ψ_s 的变化。在动态控制中，只要控制响应时间比转子时间常数 T_r 快得多，在短暂时间内即可认为 ψ_r 近乎不变，可以实现快速改变负载角 δ_{sr} 。

永磁同步电动机的电磁转矩生成

对于面装式永磁同步电动机，由于转子磁场是永磁励磁磁场 ψ_f ，转矩表达式为

$$t_e = p_0 \frac{1}{L_s} \psi_f \psi_s \sin \delta_{sf}$$

由于永磁励磁磁场 ψ_f 不变，只要保持 $|\psi_s|$ 不变，通过调节负载角可以有效控制电磁转矩，这就是永磁同步电动机直接转矩控制的基本原理。

对于插入式和内装式永磁同步电动机，由于定子磁链分量分别为

$$\psi_d = \psi_f + L_d i_d = \psi_s \cos \delta_{sf} \quad \psi_q = L_q i_q = \psi_s \sin \delta_{sf}$$

代入转矩表达式有

$$t_e = p_0 [\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] = p_0 \left(\frac{\psi_f \psi_s}{L_d} \sin \delta_{sf} + \frac{L_d - L_q}{2L_d L_q} \psi_s^2 \sin 2\delta_{sf} \right)$$

若控制 ψ_s 为恒定值，则转矩仅与负载角 δ_{sf} 有关。令 $L_d = L_q = L_s$ ，即为面装式永磁同步电动机的表达式，因此两者控制原理相同。

4.1.2 控制方式

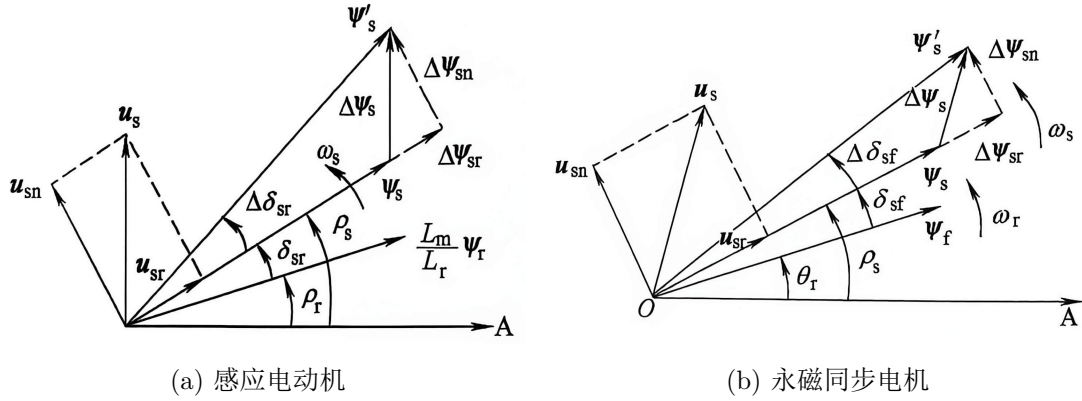


图 4.1: 定子电流矢量作用和定子磁链轨迹

忽略定子电阻影响，定子电压矢量方程为

$$\mathbf{u}_s = \frac{d\psi_s}{dt} \Rightarrow \Delta\psi_s = \mathbf{u}_s \Delta t$$

因此定子磁链矢量与定子电压矢量具有微积分的关系，在 $\mathbf{u}_s$ 作用的很短时间内，磁链矢量增量方向与电压矢量方向相同，变化速率为 $|\mathbf{u}_s|$ 。

将定子磁链表示为 $\psi_s = |\psi_s|e^{j\rho_s}$ ，则电压方程可以表示为

$$\mathbf{u}_s = \frac{d|\psi_s|}{dt}e^{j\rho_s} + j\omega_s\psi_s = \mathbf{u}_{sr} + \mathbf{u}_{sn}$$

其中， $\mathbf{u}_{sr}$ 保持 ψ_s 的相位不变，进改变其幅值产生的电动势，方向与 ψ_s 一致或相反，称为径向分量； $\mathbf{u}_{sn}$ 保持 ψ_s 幅值不变，使其旋转产生的电动势，方向与 ψ_s 正交，称为切向分量。切向分量变化率满足

$$\frac{du_{sn}}{dt} = \frac{d\omega_s}{dt}|\psi_s|$$

因此若切向电压变化速率较大，可以加快 δ_{sr} 或 δ_{sf} 变化，会使电磁转矩快速变化。这是直接转矩控制可使系统具有快速性的原因之一。

4.2 直接转矩控制系统

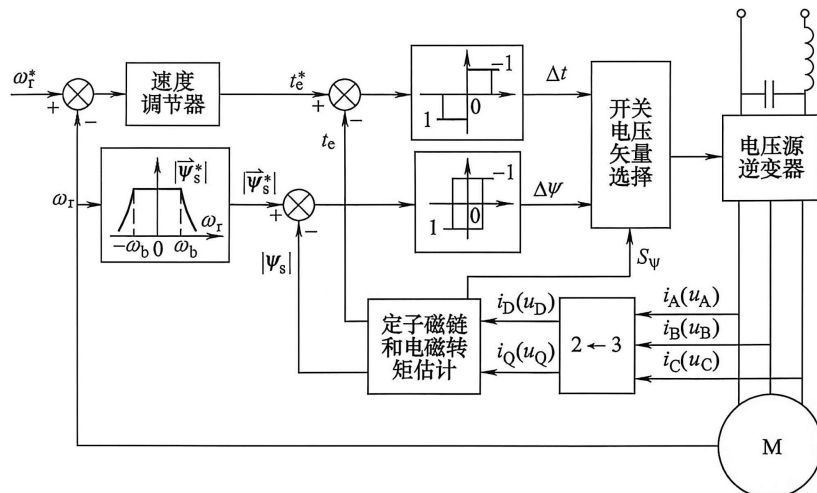


图 4.2: 直接转矩控制系统框图

4.2.1 滞环比较控制

滞环比较控制利用两个滞环比较器分别控制定子磁链幅值和电磁转矩，将磁链幅值和转矩偏差限制在一定容差之内，又称 Bang-Bang 控制。

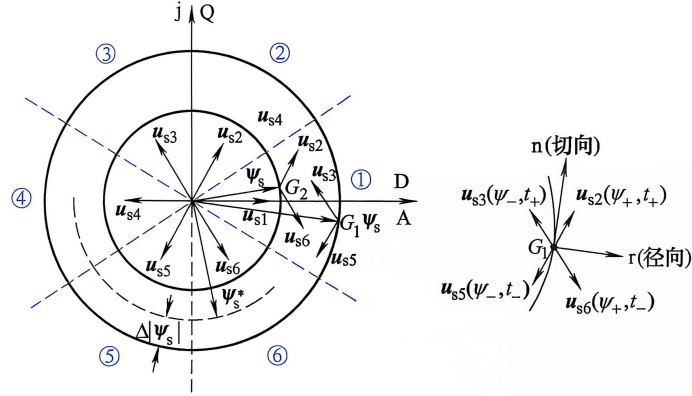


图 4.3: 滞环比较控制

开关矢量将空间分成了 6 个扇区，以扇区 1 为例，若选择 u_{s1} 和 u_{s4} 会使得 ψ_s 幅值急剧变化且转速变化有限，因此需要在剩下四个电压矢量和零矢量中挑选。由电压矢量在径向和切向的投影可以判断各矢量对磁链和转矩所起的作用，根据滞环比较器的输出信号决定选择的开关矢量，选择表如下：

表 1: 开关电压矢量选择表

$\Delta\psi$	Δt	①	②	③	④	⑤	⑥
1	1	u_{s2}	u_{s3}	u_{s4}	u_{s5}	u_{s6}	u_{s1}
	0	u_{s7}	u_{s8}	u_{s7}	u_{s8}	u_{s7}	u_{s8}
	-1	u_{s6}	u_{s1}	u_{s2}	u_{s3}	u_{s4}	u_{s5}
-1	1	u_{s3}	u_{s4}	u_{s5}	u_{s6}	u_{s1}	u_{s2}
	0	u_{s8}	u_{s7}	u_{s8}	u_{s7}	u_{s8}	u_{s7}
	-1	u_{s5}	u_{s6}	u_{s1}	u_{s2}	u_{s3}	u_{s4}

其中，各指标取值如下

$$\Delta\psi = \begin{cases} 1 & |\psi_s| \leq |\psi_s^*| - \Delta|\psi_s| \\ -1 & |\psi_s| \leq |\psi_s^*| + \Delta|\psi_s| \end{cases}$$

$$\Delta t = \begin{cases} 1 & t_e \leq t_e^* - \Delta|t_e| \\ 0 & t_e^* - \Delta|t_e| < t_e < t_e^* + \Delta|t_e| \\ -1 & t_e \leq t_e^* + \Delta|t_e| \end{cases}$$

数字化实现时，磁链幅值变化最大幅度为

$$|\Delta\psi_s|_s = \frac{V_c}{2} \Delta t_s$$

由于采样时间延迟 Δt_{sa} ，磁链幅值变化可能超过滞环带宽为

$$|\Delta\psi_s|_{sa} = 2\Delta|\psi_s| + \frac{V_c}{2} \Delta t_{sa}$$

对于三相感应电动机，电流变化率为

$$\frac{d\mathbf{i}_s}{dt} = \frac{1}{L'_s} \left(\frac{d\psi_s}{dt} - \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_r}{dt} \right)$$

其中 $\mathbf{v} = \frac{d\psi_s}{dt}$ 是由定子磁链矢量变化引起的感应电压矢量，不计定子电阻时与外加电压矢量 $\mathbf{u}_s$ 平衡。
 $\mathbf{e} = \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_r}{dt}$ 是由转子磁链变化引起的感应电压矢量。忽略 $\Delta\psi_s$ ，则电磁转矩的增量为

$$\Delta t_e = p_0 \psi_s \times \Delta \mathbf{i}_s = p_0 \psi_s \times \frac{1}{L'_s} (\mathbf{v} - \mathbf{e}) \Delta t$$

数字化实现时，转矩变化量为

$$\Delta t_e|_s = p_0 \psi_s \times \frac{1}{L'_s} (\mathbf{v} - \mathbf{e}) \Delta t_s$$

由于采样时间延迟 Δt_{sa} ，转矩变化可能超过滞环带宽为

$$\Delta t_e|_{sa} = 2\Delta t_e + p_0 \psi_s \times \frac{1}{L'_s} (\mathbf{v} - \mathbf{e}) \Delta t_{sa}$$

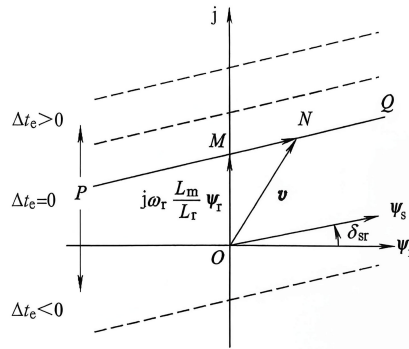


图 4.4: 转矩增量与转速的关系

当 ψ_r 幅值不变时，将转子磁链变化产生的感应电压矢量表示为 $\mathbf{e} = j\omega_r \frac{L_m}{L_r} \psi_r$ ，代入转矩变化量表达式有

$$\Delta t_e = p_0 \psi_s \times \frac{1}{L'_s} \left(\mathbf{v} - j\omega_r \frac{L_m}{L_r} \psi_r \right) \Delta t$$

因此电磁转矩的变化会受电动机转速影响。在低速区，外加电压矢量控制作用明显，转矩增幅加大。在高速区，随着 ω_r 增大，外加电压矢量控制作用减弱，达到 M 点时，对转矩的控制作用消失。

多位滞环比较控制

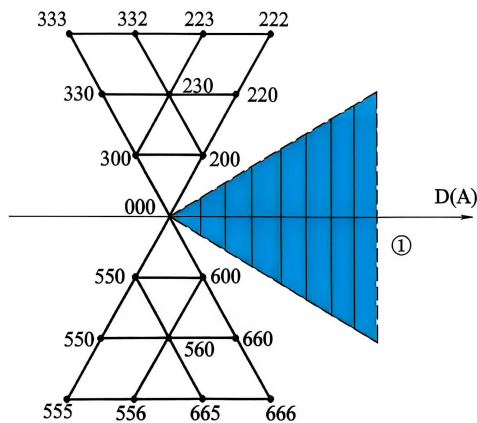


图 4.5: 多位滞环比较的电压矢量选择

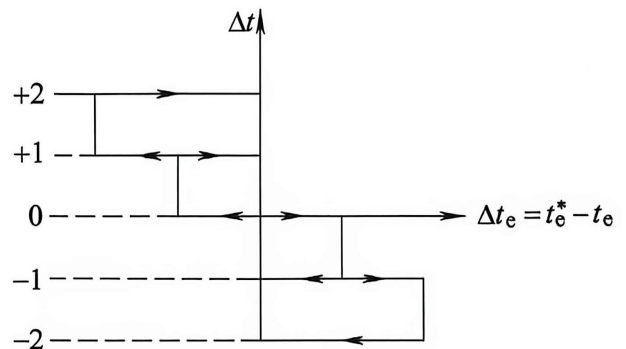


图 4.6: 五位滞环比较器

将一个采样周期分成几个时间段，可以在一个周期内组合成多个不同的电压矢量，扩大了电压矢量的选择范围。将采样周期分成的时间段越多，可以组合出的电压矢量数目就越多。

将一个采样周期分成 3 段，则得到 19 个电压矢量，对于上半部的 9 个电压矢量，200、220、300、330 四个电压矢量方向与 u_{s2} 或 u_{s3} 相同但幅值缩短为原来的 2/3 或 1/3。230、223、332 不仅幅值不同，方向也不同，相当于又构成了 3 个新的开关电压矢量。可以计及转速影响，将转矩偏差、磁链偏差和转速 3 个信息量作为选择电压矢量的依据。对于转矩，采用五位滞环比较器，输出为-2,-1,0,1,2，其中-1,0,1 对应转矩稳态变化，2 和-2 对应转矩瞬态变化。对于磁链仍采用二位滞环比较器输出 1 或-1。

4.2.2 磁链和转矩估计

电压-电流模型的磁链估计

由定子电压和电流估计磁链

$$\psi_s = \int (u_s - R_s i_s) dt$$

低频情况下，由于定子电压很小，定子电阻参数变化对积分影响很大，可以采用大时间常数的低通滤波器代替积分器，即

$$\psi_s = \frac{1}{T_s + 1} (u_s - R_s i_s)$$

电流-转速模型的磁链估计

也可以由定子电流和速度估计磁链。

对于三相感应电动机有

$$\begin{aligned} \psi_s &= \sigma L_s i_s + \frac{L_m}{L_r} \psi_r \\ \frac{d\psi_r}{dt} &= \frac{L_m}{\sigma L_s T_r} \left(\psi_s - \frac{L_s}{L_m} \psi_r \right) + j\omega_r \psi_r \end{aligned}$$

对于永磁同步电动机有

$$\psi_d = \psi_f + L_d i_d$$

$$\psi_q = L_q i_q$$

电流-速度模型没有定子电阻，对感应电动机，需要使用转子时间常数和定转子电感值，对永磁同步电动机，需要使用定子电感值和永磁励磁磁场磁通。一般而言，高速段采用电压-电流模型，低速段采用电流-速度模型。

电磁转矩估计

电磁转矩的估计值为

$$t_e = p_0 (\psi_D i_Q - \psi_Q i_D)$$

其中， i_D, i_Q 为实测值， ψ_D, ψ_Q 为估计值。

4.2.3 预期电压直接转矩控制

根据上一采样周期内磁链和转矩的偏差来确定下一采样周期所期望的电压矢量，并利用相邻非零开关电压矢量和零电压矢量线性组合而成。

满足定子电压方程则有

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt}$$

由图可得

$$u_{Dref} = R_s i_D + \frac{|\boldsymbol{\psi}_{sref} \cos(\rho_s + \Delta_{sf}) - |\boldsymbol{\psi}_s| \cos \rho_s}{\Delta T}$$

$$u_{Qref} = R_s i_Q + \frac{|\boldsymbol{\psi}_{sref} \sin(\rho_s + \Delta_{sf}) - |\boldsymbol{\psi}_s| \sin \rho_s}{\Delta T}$$

SVPWM 技术

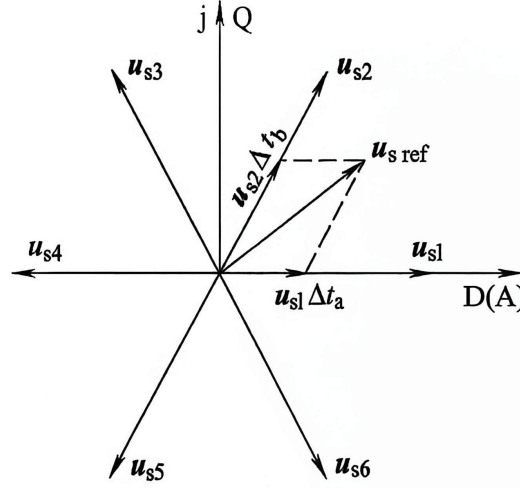


图 4.8: 电压矢量合成

对于预期电压矢量，采用相邻的两个开关电压矢量加上零电压矢量的线性组合来构成，由下式合成

$$\mathbf{u}_{sref} \Delta T = \mathbf{u}_{sk} \Delta t_a + \mathbf{u}_{s(k+1)} \Delta t_b + \mathbf{u}_0 \Delta t_0$$

其中各矢量作用时间为

$$\Delta t_a = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{V_c} \left(u_{Dref} - \frac{1}{\sqrt{3}} u_{Qref} \right) \Delta T$$

$$\Delta t_b = \frac{\sqrt{2}}{V_c} u_{Qref} \Delta T$$

$$\Delta t_0 = \Delta T - \Delta t_a - \Delta t_b$$

5 无速度传感器控制

5.1 基于数学模型的开环估计

5.1.1 感应电动机转速估计

利用 ABC 轴系方程估计

由 $\psi_r = L_m \mathbf{i}_s + L_r \mathbf{i}_r$ 得

$$\mathbf{i}_r = \frac{1}{L_r}(\psi_r - L_m \mathbf{i}_s)$$

代入转子电压方程 $0 = R_r \mathbf{i}_r + \frac{d\psi_r}{dt} - j\omega_r \psi_r$ 有

$$\omega_r = \frac{\frac{d\psi_r}{dt} + \frac{1}{T_r} \psi_r - \frac{L_m}{T_r} \mathbf{i}_s}{j\psi_r}$$

磁链方程为

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{L_r}{L_m}(\psi_s - L'_s \mathbf{i}_s) \\ \psi_s &= \int (\mathbf{u}_s - R_s \mathbf{i}_s) dt \\ \frac{d\psi_r}{dt} &= \frac{L_r}{L_m} \left(\mathbf{u}_s - R_s \mathbf{i}_s - L'_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} \right) \end{aligned}$$

根据 $\mathbf{u}_s, \mathbf{i}_s$ 的测量值计算出磁链。

利用定子磁场定向轴系估计

电压矢量方程改写成

$$\frac{d\psi_r}{dt} - \frac{L_m}{T_r} \mathbf{i}_s = -\frac{\psi_r}{T_r} + j\omega_r \psi_r$$

将磁链方程代入得

$$\mathbf{u}_s - \left(R_s + \frac{L_s}{T_r} \right) \mathbf{i}_s - L'_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} = -\frac{\psi_s}{T_r} + j\omega_r (\psi_s - L'_s \mathbf{i}_s)$$

转换到定子磁场定向的 MT 轴系，且考虑到 $\psi_T = 0$ ， $\psi_s e^{-j\rho_s} = |\psi_s|$ ，则有

$$\left[\mathbf{u}_s - \left(R_s + \frac{L_s}{T_r} \right) \mathbf{i}_s - L'_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} \right] e^{-j\rho_s} = -\frac{\psi_s}{T_r} + j\omega_r (|\psi_s| - L'_s \mathbf{i}_s^M) = u_M + ju_T$$

求得转子速度估计为

$$\hat{\omega}_r = \frac{u_T}{|\psi_s| - L'_s i_M}$$

5.1.2 永磁同步电动机转子位置估计

面装式 PMSM 的电压方程为

$$\begin{bmatrix} u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_D \\ e_Q \end{bmatrix}$$

由于感应电动势为

$$\begin{bmatrix} e_D \\ e_Q \end{bmatrix} = \omega_r \psi_f \begin{bmatrix} -\sin \theta_r \\ \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

于是转子位置角为

$$\hat{\theta}_r = \arctan \left(\frac{-u_D + R_s i_D + L_s \frac{di_D}{dt}}{u_Q - R_s i_Q - L_s \frac{di_Q}{dt}} \right)$$

5.2 模型参考自适应系统

模型参考自适应系统（Model Reference Adaptive System, MRAS）采用参考模型规定了系统所要求的性能。参考模型和自适应模型由相同的外部输入所激励，状态矢量分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 。差值矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{b}m\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 输入自适应机构，由自适应机构修改可调模型的参数，使得可调模型状态能够快速稳定地逼近 $\mathbf{x}$ 。

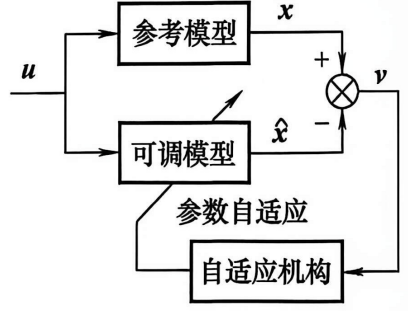


图 5.1: MRAS 结构框图

构成品质优良的自适应系统需要确定自适应律。可以采用局部参数最优化理论为基础的设计方法、以 Lyapunov 稳定性理论为基础的设计方法和以 Popov 稳定性理论为基础的设计方法。

5.2.1 模型设计

将转子矢量电压方程消去 $\mathbf{i}_r$ 得

$$T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r = L_m \mathbf{i}_s + j\omega_r T_r \psi_r$$

此式可以构成可调模型。

将定子电压矢量转化为

$$\frac{d\psi_r}{dt} = \frac{L_r}{L_m} \left(\mathbf{u}_s - R_s \mathbf{i}_s - L'_s \frac{d\mathbf{i}_s}{dt} \right)$$

此式可以构成参考模型。

5.2.2 自适应律

以估计值形式表示参考模型为

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{\psi}_d}{dt} \\ \frac{d\hat{\psi}_q}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_r} & -\hat{\omega}_r \\ \hat{\omega}_r & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_d \\ \hat{\psi}_q \end{bmatrix} + \frac{L_m}{T_r} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

定义状态广义误差 $\mathbf{e} = \psi_r - \hat{\psi}_r$ ，两式相减得

$$\begin{bmatrix} \frac{de_d}{dt} \\ \frac{de_q}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_r} & -\hat{\omega}_r \\ \hat{\omega}_r & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} - (\hat{\omega}_r - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_d \\ \hat{\psi}_q \end{bmatrix}$$

写成矩阵形式为

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}_e \mathbf{e} - \mathbf{W}$$

此式可构成标准反馈系统。其中 $\mathbf{D}$ 为增益矩阵，将 $\mathbf{e}$ 处理为用于自适应控制的另一矢量 $\mathbf{V}$ ，简化计算可取 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ 。自适应矢量 $\mathbf{V}$ 和反馈矢量 $\mathbf{W}$ 的关系用非线性时变反馈环节表示。

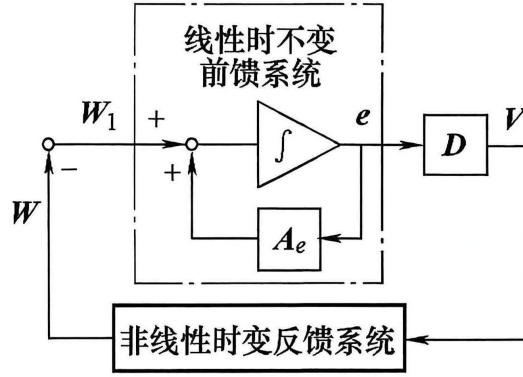


图 5.2: 反馈校正的等效非线性反馈系统

根据 Popov 超稳定理论，使系统渐进稳定，非线性时变反馈环节必须满足

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{V}^T \mathbf{W} dt \geq -r_0^2 \quad \forall t_1 > 0, r_0^2 < \infty$$

将 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{W}$ 代入可得

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{e}^T (\hat{\omega}_r - \omega_r) \mathbf{J} \hat{\psi}_r dt$$

将 $\hat{\omega}_r$ 取成比例积分形式

$$\hat{\omega}_r = \int_0^t F_1(v, t, \tau) d\tau + F_2(v, t) + \hat{\omega}_r(0)$$

代入上式可得

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{e}^T \left[\int_0^t F_1(v, t, \tau) d\tau + \hat{\omega}_r(0) - \omega_r \right] \mathbf{J} \hat{\psi}_r dt + \int_0^{t_1} \mathbf{e}^T F_2(v, t) \mathbf{J} \hat{\psi}_r dt = \eta_1(0, t_1) + \eta_2(0, t_1)$$

分别使

$$\eta_1(0, t_1) \geq -r_1^2 \quad \eta_2(0, t_1) \geq -r_2^2$$

对 η_1 ，利用下述不等式

$$\int_0^{t_1} \frac{df(t)}{dt} k f(t) dt = \frac{k}{2} [f^2(t_1) - f^2(0)] \geq \frac{1}{2} k f^2(0) \quad k > 0$$

并取

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\psi}_r \quad k f(t) = \int_0^t F_1(v, t, \tau) d\tau + \hat{\omega}_r(0) - \omega_r$$

即取

$$F_1(v, t, \tau) = K_i \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\psi}_r$$

对 η_2 ，被积函数为正即可保证，可取

$$F_2(v, t) = K_p \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\psi}_r$$

代入可得转子速度估计式为

$$\hat{\omega}_r = \int_0^t K_i \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\psi}_r dt + K_p \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\psi}_r + \hat{\omega}_r(0)$$

将 e 和 $\hat{\psi}_r$ 代入可得

$$\hat{\omega}_r = \int_0^t K_i(\hat{\psi}_d\psi_q - \psi_d\hat{\psi}_q)dt + K_p(\hat{\psi}_d\psi_q - \psi_d\hat{\psi}_q) = \left(\frac{K_i}{p} + K_p\right)\varepsilon_\omega$$

其中转速误差信息 $\varepsilon_\omega = \hat{\psi}_r \times \psi_r$ 取之于磁链矢量, 经 PI 调节器作用后得转速估计量。

5.3 自适应观测器

闭环和开环的区别在于是否采用了可以调节估计器响应的校正环节。闭环估计器又称状态观测器, 可以实时观测非线性动态系统的状态和参数, 使用电动机的数学模型来预测或估计电动机状态 $\hat{x}$, 估计状态以反馈校正方式进行校正。校正方式是在状态估计方程中增加一个校正项, 相当于一个误差补偿器, 产生对状态估计方程的校正输入。

5.3.1 状态估计方程和状态观测器

对于三相感应电动机, 由定转子电压矢量和磁链矢量方程可得

$$\begin{bmatrix} \frac{di_s}{dt} \\ \frac{d\psi_r}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_{sr}} & -\frac{L_m}{L'_s L_r}(-\frac{1}{T_r} + j\omega_r) \\ \frac{L_m}{T_r} & -\frac{1}{T_r} + j\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u_s}{L'_s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中, $T'_{sr} = L'_s/R_{sr}$, $R_{sr} = R_s + (L_m/L_r)^2 R_r$ 。

将上式改写成状态方程式为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} & u &= \begin{bmatrix} u_D \\ u_Q \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} I \\ 0 \end{bmatrix} & J &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_{sr}} I & -\frac{L_m}{L'_s L_r}(-\frac{1}{T_r} I + \omega_r J) \\ \frac{L_m}{T_r} I & -\frac{1}{T_r} I + \omega_r J \end{bmatrix} \end{aligned}$$

输出方程为

$$I_s = Cx$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由定子电流观测误差构成校正项, 则状态观测器为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + Bu + K(I_s - \hat{I}_s)$$

$$\hat{I}_s = C\hat{x}$$

5.3.2 转速自适应律

误差动态方程为

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e} - \Delta\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

其中误差向量 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, 误差状态矩阵为

$$\Delta\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -(\hat{\omega}_r - \omega_r) \frac{L_m}{L'_s L_r} \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & (\hat{\omega}_r - \omega_r) \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 构造 Lyapunov 函数为

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{(\hat{\omega}_r - \omega_r)^2}{\lambda}$$

其导数为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{e}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})] \mathbf{e} + (\hat{\mathbf{x}} \Delta\mathbf{A}^T \mathbf{e} + \mathbf{e} \Delta\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) + \frac{2}{\lambda} (\hat{\omega}_r - \omega_r) \frac{d\hat{\omega}_r}{dt}$$

由于第一项始终为负, 只需第二项和第三项之和为零即可保证 $\dot{\mathbf{V}} < 0$, 从而保证系统稳定性。即有

$$\hat{\mathbf{x}} \Delta\mathbf{A}^T \mathbf{e} + \mathbf{e} \Delta\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \frac{2}{\lambda} (\hat{\omega}_r - \omega_r) \frac{d\hat{\omega}_r}{dt} = 0$$

将 $\mathbf{e}, \Delta\mathbf{A}, \hat{\mathbf{x}}$ 代入得

$$-2 \frac{L_m}{L'_s L_r} (\hat{\omega}_r - \omega_r) \hat{\psi}_r^T \mathbf{J} (\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s) + \frac{2}{\lambda} (\hat{\omega}_r - \omega_r) \frac{d\hat{\omega}_r}{dt} = 0$$

因此转速估计值满足

$$\hat{\omega}_r = \frac{\lambda L_m}{L'_s L_r} \int \hat{\psi}_r^T \mathbf{J} (\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s) dt = K_i \int \hat{\psi}_r^T \mathbf{J} (\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s) dt$$

改进观测器的响应, 可以增加 P 控制器得转速自适应律

$$\hat{\omega}_r = \left(K_p + \frac{K_i}{p} \right) \hat{\psi}_r^T \mathbf{J} (\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s)$$

若 $\hat{\psi}_r = \psi_r$, 可以改写为

$$\hat{\omega}_r = - \left(K_p + \frac{K_i}{p} \right) \hat{\psi}_r \times (\mathbf{i}_s - \hat{\mathbf{i}}_s) = \frac{L_r}{p_0 L_m} \left(K_p + \frac{K_i}{p} \right) (\hat{t}_e - t_e)$$

状态估计方程中, 增益矩阵 $\mathbf{K}$ 可以通过极点配置的方式来确定, 误差响应的动态特性由 $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ 的特征值决定, 因此由 $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ 的极点决定, 合理配置可以满足系统的动态要求。

对于定子电阻 R_s 的辨识, 将状态矩阵中的定子电阻作为可调参数, 即

$$\frac{1}{\hat{T}'_{sr}} = \frac{\hat{R}_s}{L'_s} + \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r$$

误差状态矩阵为

$$\Delta\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L'_s} (\hat{R}_s - R_s) \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

采用与转速估计同样的方法可得

$$\hat{R}_s = - \left(K_p + \frac{K_i}{p} \right) [(i_D - \hat{i}_D) \hat{i}_D + (i_Q - \hat{i}_Q) \hat{i}_Q]$$

转子磁链矢量可由 $\hat{\psi}_d, \hat{\psi}_q$ 估计得到, 即

$$|\hat{\psi}_r| = \sqrt{\hat{\psi}_d^2 + \hat{\psi}_q^2} \quad \hat{\theta}_M = \arcsin \frac{\hat{\psi}_q}{|\hat{\psi}_r|}$$

转子磁链矢量的旋转速度估计为

$$\hat{\omega}'_s = \frac{d\hat{\theta}_M}{dt} = \frac{\hat{\psi}_d \frac{d\hat{\psi}_q}{dt} - \hat{\psi}_q \frac{d\hat{\psi}_d}{dt}}{\hat{\psi}_d^2 + \hat{\psi}_q^2}$$

5.4 扩展卡尔曼滤波

扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filters, EKF) 是线性系统状态估计的卡尔曼滤波算法在非线性系统的拓展, 因为滤波器增益能够适应环境自动调节, 本身就是一个自适应系统。

EKF 的一般形式为

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})$$

形式上与自适应观测器相同, 都是设有反馈校正环节的闭环估计。但是状态观测器中是自适应律在起作用, 自适应律是根据系统稳定性理论, 增益矩阵的加权作用体系拿在调节误差的动态响应上。而 EKF 是根据均方误差最小原理确定的增益矩阵, 增益矩阵的加权为下一步提供最有可能的状态估计。又称 EKF 为递推优化随机状态估计器。

5.4.1 数学模型

EKF 的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_{sr}} & -\frac{L_m}{L'_s L_r}(-\frac{1}{T_r} + j\omega_r) & 0 \\ \frac{L_m}{T_r} & -\frac{1}{T_r} + j\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u_s}{L'_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以 DQ 轴分量表示, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \\ \dot{\psi}_d \\ \dot{\psi}_q \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T'_{sr}} & 0 & \frac{L_m}{L'_s L_r T_r} & \omega_r \frac{L_m}{L'_s L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T'_{sr}} & -\omega_r \frac{L_m}{L'_s L_r} & \frac{L_m}{L'_s L_r T_r} & 0 \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & -\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & \omega_r & -\frac{1}{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \\ \psi_d \\ \psi_q \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L'_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_D \\ u_Q \end{bmatrix}$$

简化表示为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

上式中, 已假定 $\dot{\omega}_r = 0$, 由机械运动方程得 $J \rightarrow \infty$, 这虽然不符合实际, 但是状态观测中可以将这种不确定性当做状态噪声处理, 由 EKF 进行校正。在数字化系统中, 每个采样周期内, 可以认为 ω_r 恒定。

离散化系统方程为

$$x(k+1) = A'x(k) + B'u(k)$$

$$y(k) = C'x(k)$$

通常情况下, 采样时间很短, 因此矩阵的离散化形式为

$$A' = e^{AT} \approx 1 + AT = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T}{T'_{sr}} & 0 & \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r} & \omega_r \frac{TL_m}{L'_s L_r} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{T}{T'_{sr}} & -\omega_r \frac{TL_m}{L'_s L_r} & \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r} & 0 \\ \frac{TL_m}{T_r} & 0 & 1 - \frac{T}{T_r} & -T\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{TL_m}{T_r} & T\omega_r & 1 - \frac{T}{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{T}{L'_s} & 0 \\ 0 & \frac{T}{L'_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据噪声来源将环境噪声分为两类：数学模型中参数的不准确性或参数的变化以及系统的扰动，还有定子电压测量引起的噪声用系统噪声矢量 $\mathbf{V}$ 表示；定子电流的测量引起的噪声用测量噪声矢量 $\mathbf{W}$ 来表示。将噪声纳入方程中，改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}'\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k) + \mathbf{V}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}'\mathbf{x}(k) + \mathbf{W}(k) \end{aligned}$$

其中噪声矢量数字特征为

$$E\{\mathbf{V}(k)\} = E\{\mathbf{W}(k)\} = 0 \quad COV(\mathbf{V}) = \mathbf{Q} \quad COV(\mathbf{W}) = \mathbf{R}$$

5.4.2 状态估计

状态预测方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}'\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k) = \Phi[\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k)] = \\ &\begin{bmatrix} (1 - \frac{T}{T'_{sr}})\hat{i}_D(k) + \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r}\hat{\psi}_d(k) + \hat{\omega}_r(k)\frac{TL_m}{L'_s L_r}\hat{\psi}_q(k) + \frac{T}{L'_s}u_D(k) \\ (1 - \frac{T}{T'_{sr}})\hat{i}_Q(k) - \hat{\omega}_r(k)\frac{TL_m}{L'_s L_r}\hat{\psi}_q(k) + \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r}\hat{\psi}_d(k) + \frac{T}{L'_s}u_Q(k) \\ \frac{TL_m}{T_r}\hat{i}_D(k) + (1 - \frac{T}{T_r})\hat{\psi}_d(k) - T\hat{\omega}_r(k)\hat{\psi}_q(k) \\ \frac{TL_m}{T_r}\hat{i}_Q(k) + (1 - \frac{T}{T_r})\hat{\psi}_q(k) + T\hat{\omega}_r(k)\hat{\psi}_d(k) \\ \hat{\omega}_r(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在校正前要计算协方差矩阵

$$\tilde{\mathbf{P}}(k+1) = \mathbf{G}(k+1)\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{G}^T(k+1) + \mathbf{Q}$$

式中 $\mathbf{G}(k+1)$ 是梯度矩阵，求解如下

$$\mathbf{G}(k+1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{B}'\mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}(k+1)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Phi[\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \mathbf{u}(k+1)]|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}(k+1)}$$

将矩阵 $\Phi[\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k)]$ 的状态变量 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 替换成 $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ ，输入矢量 $\mathbf{u}(k)$ 换成 $\mathbf{u}(k+1)$ ，然后对 $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ 求偏导数可得

$$\mathbf{G}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T}{T'_{sr}} & 0 & \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r} & \tilde{\omega}_r(k+1)\frac{TL_m}{L'_s L_r} & \frac{TL_m}{L'_s L_r}\tilde{\psi}_q(k+1) \\ 0 & 1 - \frac{T}{T'_{sr}} & -\tilde{\omega}_r(k+1)\frac{TL_m}{L'_s L_r} & \frac{TL_m}{L'_s L_r T_r} & -\frac{TL_m}{L'_s L_r}\tilde{\psi}_d(k+1) \\ \frac{TL_m}{T_r} & 0 & 1 - \frac{T}{T_r} & -T\tilde{\omega}_r(k+1) & T\tilde{\psi}_q(k+1) \\ 0 & \frac{TL_m}{T_r} & T\tilde{\omega}_r(k+1) & 1 - \frac{T}{T_r} & T\tilde{\psi}_d(k+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算增益矩阵如下

$$\mathbf{K}(k+1) = \tilde{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}]^{-1}$$

其中 $\mathbf{H}(k+1)$ 为梯度矩阵, 计算如下

$$\mathbf{H}(k+1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{C}'\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

完成状态矢量估计

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \tilde{\mathbf{y}}(k+1)]$$

其中, $\mathbf{y}(k+1)$ 是测量状态矢量, 为

$$\mathbf{y}(k+1) = [i_D(k+1) \quad i_Q(k+1)]^T$$

$\tilde{\mathbf{y}}(k+1)$ 是预测输出矢量, 为

$$\tilde{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{C}'\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\tilde{i}_D(k+1) \quad \tilde{i}_Q(k+1)]^T$$

最后计算协方差矩阵供下一次预测使用, 计算如下

$$\hat{\mathbf{P}}(k+1) = \tilde{\mathbf{P}}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{P}}(k+1)$$

EKF 状态估计的关键是确定增益矩阵 $\mathbf{K}(k+1)$, $\mathbf{K}(k+1)$ 决定于协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}(k+1)$ 。 $\tilde{\mathbf{P}}(k+1)$ 与系统噪声矩阵 $\mathbf{Q}$ 有关。通常情况下 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 是未知的, 只能根据噪声的随机特性定性地考虑它们的确定原则。

$\mathbf{Q}$ 是 5×5 矩阵, $\mathbf{R}$ 是 2×2 矩阵, 所以需要确定 29 个元素。由于假定噪声矢量 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 是不相关的, 因此可以确定 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 都是对角阵, 即只需要确定 7 个元素。 $\mathbf{P}$ 是 5×5 矩阵, 是状态矢量的协方差矩阵, 可以认为它的初始状态矩阵也是对角阵, 而且所有的元素都相等。

为了获得满意的估计结果, 可以在滤波过程中对协方差矩阵进行迭代修正。增加 $\mathbf{Q}$ 就是加强了系统噪声, 滤波增益矩阵的元素也会增大, 加大了测量反馈的加权作用, 使滤波器瞬态特性变快。如果协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 增大, 那说明电流测量产生了强噪声, 应该减弱滤波的权重, 因此滤波增益矩阵元素减小, 这将导致瞬态特性变慢。

EKF 程序计算量大, 比状态观测器更费时, 可以考虑利用降阶的数学模型。

EKF 递推公式

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}'\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(k+1) = \mathbf{G}(k+1)\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{G}^T(k+1) + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \tilde{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1)[\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{P}}(k+1)\mathbf{H}^T(k+1) + \mathbf{R}]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \tilde{\mathbf{y}}(k+1)]$$

$$\hat{\mathbf{P}}(k+1) = \tilde{\mathbf{P}}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{P}}(k+1)$$